মাধ্যমিক উচ্চতর গণিত

বীজগণিত

নবম-দশম শ্রেণী

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
ঢাকা

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক ২০০০ শিক্ষাবর্ষ
থেকে নবম–দশম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকরূপে নির্ধারিত

মাধ্যমিক উচ্চতর বীজগণিত

নবম–দশম শ্রেণী

রচনা

মোহাম্মদ নূরন্নবী খোন্দকার

দেওয়ান মোঃ আব্দুল কুদ্দুস

সম্পাদনা

আ.ফ.ম. খোদাদাদ খান

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।

প্রসঙ্গ কথা

শিক্ষার উন্নয়ন ব্যতীত জাতীয় উন্নয়ন সম্ভব নয়। স্বাধীনতা উত্তর বাংলাদেশের উন্নয়নের ধারায় জনগণের আশা-আকাঙ্ক্ষা, আর্থ-সামাজিক ও সাংস্কৃতিক জীবনপ্রবাহ যাতে পাঠ্যপুস্তকে প্রতিফলিত হয়, সেই লক্ষ্যে জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি প্রণয়ন কমিটির সুপারিশক্রমে আশির দশকের প্রারম্ভে প্রবর্তিত হয় নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষার্থীদের জন্য নতুন পাঠ্যপুস্তক। দীর্ঘ এক যুগেরও বেশি সময় ধরে এই পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রচলিত ছিল।

উন্নয়নের ধারায় ১৯৯৪ সালে নিম্ন মাধ্যমিক, মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষাক্রম সংস্কার, পরিমার্জন ও বাস্তবায়নের জন্য "শিক্ষাক্রম প্রণয়ন ও বাস্তবায়ন সম্পর্কিত টাস্কফোর্স" গঠিত হয়। ১৯৯৫ সালে নতুন শিক্ষাক্রম অনুযায়ী পর্যায়ক্রমে ৬ষ্ঠ থেকে ৯ম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। সময়ের সাথে সাথে দেশ ও সমাজের চাহিদা পরিবর্তনের প্রেক্ষাপটে ২০০০ সালে নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের প্রায় সকল পাঠ্যপুস্তক উচ্চ পর্যায়ের বিশেষজ্ঞদের দ্বারা যৌক্তিক মূল্যায়নের মাধ্যমে পুনরায় সংশোধন ও পরিমার্জন করা হয়। ২০০৮ সালে শিক্ষা মন্ত্রণালয় কর্তৃক গঠিত শিক্ষাবিষয়ক টাস্কফোর্সের সুপারিশে প্রচ্ছদ প্রণয়ন, বানান ও তথ্যগত বিষয় সংশোধনসহ পাঠ্যপুস্তক আকর্ষণীয় করা হয়েছে। আশা করা যায়, পাঠ্যপুস্তকটি শিক্ষক–শিক্ষার্থীর নিকট আরো গ্রহণযোগ্য ও সময়োপযোগী বলে বিবেচিত হবে।

শিক্ষাক্রমের আলোকে মূল্যায়নকে আরো ফলপ্রসূ করার জন্য দেশের সুধীজন ও শিক্ষাবিদগণের পরামর্শের প্রেক্ষিতে সরকারি সিদ্ধান্ত অনুযায়ী প্রতিটি অধ্যায়–শেষে বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্ন সংযোজন করা হয়েছে। প্রত্যাশা করা যায়, এতে শিক্ষার্থীর মুখস্থনির্ভরতা বহুলাংশে হ্রাস পাবে এবং শিক্ষার্থী তার অর্জিত জ্ঞান ও অনুধাবন বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করতে বা যে–কোনো বিষয়কে বিচার–বিশ্লেষণ অথবা মূল্যায়ন করতে পারবে।

গণিত শিক্ষাকে যুগোপযোগী করার অভিপ্রায়ে এবং আধুনিক শিখনচাহিদা অনুযায়ী গণিত শিক্ষার মান আন্তর্জাতিক তুল্যমানে উন্নীত করার লক্ষ্যে মাধ্যমিক স্তরের উচ্চতর বীজগণিত বইটিতে প্রয়োজনীয় সংশোধনীসহ পরিমার্জন করা হয়েছে। প্রযোজ্য ও প্রায়োগিক ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার সহজ করার জন্য উচ্চতর বীজগণিতের ভিত্তি অন্বয় ও বিপরীত অন্বয়, ফাংশন এবং পরিসংখ্যানের প্রাথমিক ধারণাসমূহ সহজভাবে উপস্থাপন করা হয়েছে। গণিতের নিজস্ব বৈশিষ্ট অক্ষুণ্ন রেখে শিক্ষার্থীদের মাঝে গণিতমনস্কতা সৃষ্টি করা অপরিহার্য। এদিকে বিশেষ লক্ষ রেখে নতুন ধ্যানধারণা সহজভাবে এবং সম্ভাব্য ক্ষেত্রে অর্ধবাস্তব পর্যায়ে উপস্থাপন করা হয়েছে। ফলে শিক্ষার্থীরা নিজ প্রচেষ্টায় বা শিক্ষকের ন্যূনতম সহায়তায় বিষয়বস্তু আয়ত্ত করতে সক্ষম হবে।

আমরা জানি, শিক্ষাক্রম উন্নয়ন একটি ধারাবাহিক প্রক্রিয়া এবং এর ভিত্তিতে পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। কাজেই পাঠ্যপুস্তকের আরো উন্নয়নের জন্য যেকোনো গঠনমূলক ও যুক্তিসংগত পরামর্শ গুরুত্বের সাথে বিবেচিত হবে। ২০২১ সালে স্বাধীনতার সুবর্ণ জয়ন্তীতে প্রত্যাশিত সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ার নিরন্তর প্রচেষ্টার অংশ হিসেবে শিক্ষার্থীদের বিজ্ঞানমনস্ক করে তোলার লক্ষ্যে বর্তমান সংস্করণে কিছু পরিমার্জন করা হয়েছে। অতি অল্প সময়ের মধ্যে পরিমার্জিত পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রকাশ করতে গিয়ে কিছু ত্রুটি বিচ্যুতি থেকে যেতে পারে। পরবর্তী সংস্করণে পাঠ্যপুস্তকগুলো আরো সুন্দর, শোভন ও ত্রুটিমুক্ত করার চেষ্টা অব্যাহত থাকবে।

যাঁরা এ পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, যৌক্তিক মূল্যায়ন, সৃজনশীল প্রশ্ন প্রণয়ন ও প্রকাশনার কাজে আন্তরিকভাবে মেধা ও শ্রম দিয়েছেন, তাঁদের জানাই ধন্যবাদ। যাদের জন্য পাঠ্যপুস্তকটি প্রণীত হল, আশা করি তারা উপকৃত হবে।

প্রফেসর মো: মোস্তফা কামালউদ্দিন

চেয়ারম্যান

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।

সূচিপত্র

প্রথম অধ্যায়

সেট

১.১। সেট ও সেট প্রক্রিয়া

জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (১৮৪৫-১৯১৮) উদ্ভাবিত সেট তত্ত্ব গণিতের বিভিন্ন শাখায় বর্তমানে ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হচ্ছে। সেট সংক্রান্ত কতিপয় প্রাথমিক ধারণার সঙ্গে আমরা ইতঃপূর্বে (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য) পরিচিত হয়েছি। এই প্রাথমিক ধারণাগুলো এখানে পুনরোল্লেখ করা হল।

সেটের ধারণা

সাধারণভাবে, বিভিন্ন বস্তুর সুনির্ধারিত সংগ্রহকে সেট বলা হয়। এখানে সুনির্ধারিত বলতে এই বোঝায় যে, কোন বস্তুটি বিবেচনাধীন সংগ্রহের অন্তর্ভুক্ত আর কোনটি নয় তা সুনির্দিষ্টভাবে নির্ধারণ করা যায়।

সেটের বর্ণনা

সাধারণত ইংরেজি বড় অক্ষর A, B, C, X, Y, Z ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা সেট নির্দেশ করা হয় এবং নিম্নোক্ত যে কোনো পদ্ধতিতে তা বর্ণনা করা হয়।

(ক) বর্ণনা পদ্ধতি; যেমন, $A = 6$ থেকে ছোট সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট।

(খ) তালিকা বা রোস্টার পদ্ধতি; যেমন, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(গ) সেট গঠন বা সেট বিল্ডার পদ্ধতি; যেমন, $C = \{ x : x$ স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $x \leq 5\}$

সেট গঠন পদ্ধতিতে বর্ণনায় " ঃ " চিহ্নকে "যেন" পড়া হয়। অনেক সময় " ঃ " চিহ্নের পরিবর্তে " । " চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

সেটের উপাদান

কোনো সেটে অন্তর্ভুক্ত বস্তুসমূহকে ঐ সেটের উপাদান (element বা member) বলা হয়। a যদি A সেটের সদস্য হয়, তবে $a \in A$ লেখা হয় এবং a যদি A সেটের সদস্য না হয়, তবে $a \notin A$ লেখা হয়।

সমান সেট

যদি A সেটের সকল সদস্য B সেটের সদস্য হয় এবং B সেটের সকল সদস্য A সেটের সদস্য হয়, তবে A সেট ও B সেট হবে সমান সেট এবং লেখা হয় $A = B$ ।

অর্থাৎ, $A = B$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in A$ হলে, $x \in B$ হয় এবং $x \in B$ হলে, $x \in A$ হয়।

তালিকা পদ্ধতিতে সেটের বর্ণনায় কোনো সদস্যকে একাধিকবার তালিকাভুক্ত করলে অথবা তালিকার সদস্যদের ক্রম পরিবর্তন করলে সেটের কোনো পরিবর্তন হয় না।

ফাঁকা সেট : অনেক সময় সদস্যবিহীন সেট বিবেচনা করা হয়। যে সেটের কোনো সদস্য নেই, তাকে ফাঁকা বা শূন্য সেট বলা হয়। ফাঁকা সেটকে $\varnothing$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

উপসেট : যদি A সেটের সকল সদস্য B সেটের সদস্য হয়, তবে A কে B এর উপসেট বলা হয় এবং $A \subset B$ লিখে তা প্রকাশ করা হয়। উপসেট বোঝাতে $\subseteq$ চিহ্নও ব্যবহার করা হয়। লক্ষণীয় যে, $A \subseteq B$ হয় যদি ও কেবল যদি $x \in A$ হলে $x \in B$ হয়।

যেহেতু A সেটের সকল সদস্য অবশ্যই A সেটের সদস্য, সুতরাং যে কোনো সেট A তার নিজের একটি উপসেট। A, B এর উপসেট না হলে তা $A \not\subset B$ লিখে প্রকাশ করা হয়। $A \not\subset B$ হলে, A সেটে এমন অন্তত একটি উপাদান আছে যা B সেটে নেই।

যেহেতু ফাঁকা সেট $\varnothing$ এ কোনো সদস্য নেই, সুতরাং $\varnothing \not\subset A$ কখনই সম্ভব নয়। অর্থাৎ, $\varnothing$ যে কোনো সেট A এর একটি উপসেট।

একটি সেটের সদস্য সংখ্যা n হলে ঐ সেটের উপসেট সংখ্যা হবে 2^n

প্রকৃত উপসেট : সেট A কে সেট B এর প্রকৃত উপসেট বলা হয়, যদি $A \subset B$ এবং $A \neq B$ হয়। A, B এর প্রকৃত উপসেট বোঝাতে $A \subsetneqq B$ লেখা হয়। একটি সেটের সদস্য সংখ্যা n হলে ঐ সেটের জন্য (2^n-1) সংখ্যক প্রকৃত উপসেট পাওয়া যাবে।

সার্বিক সেট : আলোচনাধীন সকল উপাদানকে একটি বিশেষ সেটের অন্তর্ভুক্ত বিবেচনা করা হয়। সেই বিশেষ সেটকে ঐ আলোচনার সার্বিক সেট বলা হয় এবং সাধারণত U বা X প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। বুঝতে অসুবিধা না হলে কোনো আলোচনার সার্বিক সেটকে উহ্য রাখা হয়। ভিন্ন ভিন্ন আলোচনায় সার্বিক সেট ভিন্ন হতে পারে।

শক্তি সেট : কোনো সেট A এর সকল উপসেটের সেটকে A এর শক্তি সেট বা পাওয়ার সেট বলা হয় এবং তাকে $P(A)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

[লক্ষণীয় যে, $P(A)$ এর উপাদানগুলো প্রত্যেকেই সেট -A এর উপসেট ।]

$B \in P(A)$ বললে বুঝতে হবে $B \subseteq A$, কোনো আলোচনায় সার্বিক সেট U ধরা হলে, ঐ আলোচনায় বিবেচিত প্রত্যেক সেট $P(U)$ এর সদস্য। যেমন, $A = \{1, 2, 3\}$ হলে সেক্ষেত্রে,
A-এর শক্তি সেট, $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

সেট গুচ্ছ : কোনো সেটের সদস্যগুলো যদি প্রত্যেকেই একটি সেট হয়, তবে ঐ সেটকে অনেক সময় সেটগুচ্ছ (Family of sets) বলা হয়।
A কোন সেট হলে A এর শক্তি বা পাওয়ার সেট $P(A)$ একটি সেটগুচ্ছ। $P(A)$ এর যে কোনো উপসেটও একটি সেটগুচ্ছ। যেমন, $A = \{1,2,3\}$ হলে,

$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
$F = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
$G = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ প্রত্যেকেই সেটগুচ্ছ।

এখানে $F \subset P(A)$, $G \subset P(A)$

সংযোগ : A এবং B সেটের সকল উপাদান নিয়ে (কোনো উপাদানের পূনরাবৃত্তি না করে) গঠিত সেটকে A এবং B সেটের সংযোগ সেট বলা হয়, যা $A \cup B$ প্রতীকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ, $A \cup B = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$

দ্রষ্টব্য : $x \notin A \cup B$ হয় যদি ও কেবল যদি $x \notin A$ এবং $x \notin B$.

ছেদ : A এবং B সেটের সকল সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে A এবং B সেটের ছেদ সেট বলা হয় এবং $A \cap B$ লিখে প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ, $A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$
দ্রষ্টব্য : $x \notin A \cap B$ হয় যদি ও কেবল যদি $x \notin A$ এবং $x \notin B$.

পূরক সেট : A সেটের প্রেক্ষিতে B সেটের পূরক সেটকে $A \setminus B$ (বা $A - B$) লিখে প্রকাশ করা হয় এবং সংজ্ঞায়িত করা হয় নিম্নলিখিতভাবে :

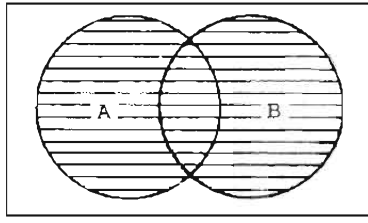
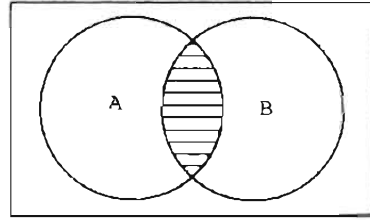
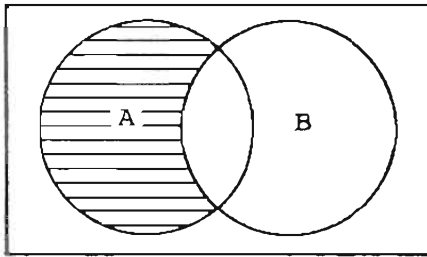
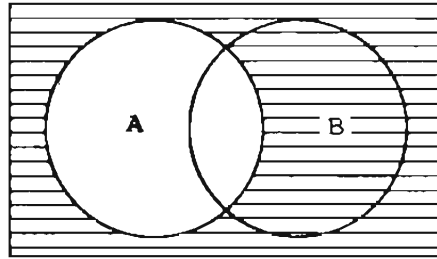
$A \setminus B = \{x : x \in A$ এবং $x \notin B\}$

অর্থাৎ, $A \setminus B$ হল ঐ সকল উপাদানের সেট যা A তে থাকে কিন্তু B তে নয়। $A \setminus B$ কে A বাদ B পড়া হয়।

সার্বিক সেট U এর প্রেক্ষিতে A সেটের পূরক সেট $U \setminus A$ সেটকে A সেটের পূরক সেট বলা হয় এবং A' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ, $A' = U \setminus A = \{ x : x \in U$ এবং $x \notin A\}$

বা, সংক্ষেপে $A' = \{ x : x \notin A\}$

নিশ্ছেদ সেট : A এবং B সেট নিশ্ছেদ সেট বা সংক্ষেপে নিশ্ছেদ বলা হয় যদি A এবং B এর মধ্যে কোনো সাধারণ উপাদান বিদ্যমান না থাকে। অর্থাৎ, যদি $A \cap B = \emptyset$ হয়।

ভেনচিত্র : কোনো সেটের একাধিক উপসেটের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করতে অনেক সময় জ্যামিতিক চিত্র ব্যবহার করা হয়। ব্রিটিশ তর্কশাস্ত্রবিদ জন ভেন (১৮৩৪–১৮৮৩) প্রথমে এরূপ চিত্রের ব্যবহার করেন বলে এগুলোকে ভেনচিত্র বলা হয়। নিম্নে এরূপ কয়েকটি ভেনচিত্র দেখানো হল :

$A \cup B$ হল গাঢ় অংশটুকু
চিত্র - ১

$A \cap B$ হল গাঢ় অংশটুকু
চিত্র - ২

$A \setminus B$ হল গাঢ় অংশটুকু
চিত্র - ৩

A' হল গাঢ় অংশটুকু
চিত্র - ৪

ভেনচিত্র ব্যবহার করে সেট প্রক্রিয়ার বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য যাচাই করা যায়।

ক্রমজোড় : (a, b) দ্বারা একটি ক্রমজোড় নির্দেশ করা হয় যার প্রথম পদ a এবং দ্বিতীয় পদ b. (a, b) তে $a = b$ হতে পারে। ক্রমজোড় (a, b) ও (c, d) সমান হয় [প্রতীকে : $(a, b) = (c, d)$] যদি ও কেবল যদি $a = c$ এবং $b = d$ হয়।

কার্তেসীয় গুণজ সেট **(Cartesian Product)**

যদি A ও B সেট হয়, তবে A এর উপাদানগুলোকে প্রথম পদ ও B এর উপাদানগুলোকে দ্বিতীয় পদ ধরে গঠিত সকল ক্রমজোড়ের সেটকে $A \times B$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয় এবং কার্তেসীয় গুণজ সেট A গুণ B বলা হয়।

লক্ষণীয় যে, $A \times B = \{(x, y) : x \in A$ এবং $y \in B\}$

$B \times A = \{(x, y) : x \in B$ এবং $y \in A\}$

এবং সাধারণভাবে, $A \times B \neq B \times A$

$A = B$ হলে, $A \times A = \{(x, y) : x \in A$ এবং $y \in A\}$ গুণজ সেটটিকে অনেক সময় A^2 প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

সংখ্যা সেট : সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে R দ্বারা সূচিত করা হয়। R এর অনেক বৈশিষ্ট্য আমরা ইতঃপূর্বে জেনেছি (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য) ।

R এর কয়েকটি বিশিষ্ট উপসেট :

(ক) সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

(খ) সকল পূর্ণসংখ্যার সেট, $Z = \{ ....-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

(গ) সকল মূলদ সংখ্যার সেট, $Q = \{\frac{p}{q} : p, q \in Z$ এবং $q \neq 0\}$

(ঘ) সকল অমূলদ সংখ্যার সেট, $Q' = R \setminus Q$ (মূল সংখ্যা বাদে সকল বাস্তব সংখ্যার সেট)

এখানে লক্ষণীয় যে, $N \subsetneqq Z \subsetneqq Q$ এবং $Q \cap Q' = \varnothing, Q \cup Q' = R$.

$N \subset Z \subset Q \subset R$

ঙ) a ও b বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$ হলে, R-এর চারটি বিশেষ ধরনের উপসেটকে a ও b প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট ব্যবধি (interval) বলা হয়। যথা :

i) a থেকে b পর্যন্ত খোলা (open) ব্যবধি

$]a, b[= \{ x : x \in R$ এবং $a < x < b\}$

ii) a থেকে b পর্যন্ত বন্ধ (closed) ব্যবধি

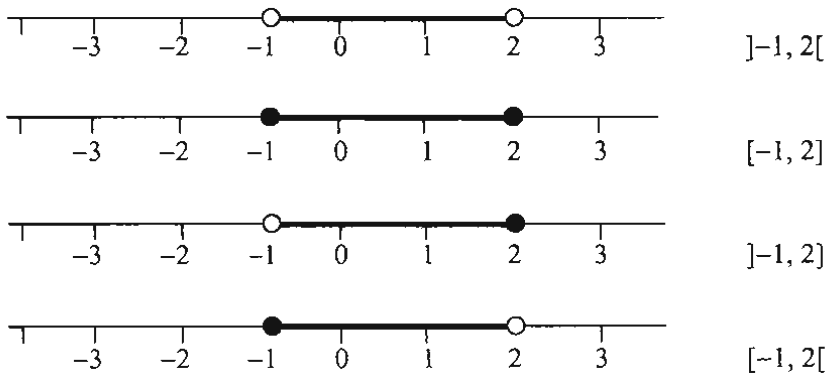
$[a, b] = \{ x : x \in R$ এবং $a \le x \leqslant b\}$

iii) a থেকে b পর্যন্ত খোলা-বন্ধ ব্যবধি

$]a, b] = \{ x : x \in R$ এবং $a < x \leqslant b\}$

iv) a থেকে b পর্যন্ত বন্ধ-খোলা ব্যবধি

$[a, b[= \{ x : x \in R$ এবং $a \le x \leqslant b\}$

সংখ্যা রেখায় এই চার প্রকার ব্যবধিকে কীভাবে চিহ্নিত করা হয় তা উদাহরণ দিয়ে দেখানো হল, যেখানে $a = -1$ ও $b = 2$.

উদাহরণ ১। প্রত্যেক $n \in N$ এর জন্য $A_n = \{n, 2n, 3n, ...\}$ ধরে দেখাও যে,

(i) $A_1 \cap A_2 = A_2,\ A_2 \cap A_3 = A_6,\ A_2 \cap A_4 = A_4.$

(ii) $A_1 \cup A_2 = A_1,\ A_2 \cup A_4 = A_2,\ A_3 \cup A_6 = A_3.$

সমাধান : এখানে $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}, A_2 = \{2, 4, 6, 8, ...\},$

$A_3 = \{3, 6, 9, ...\}, A_4 = \{ 4, 8, 12, ...\}$ ইত্যাদি।

অর্থাৎ, A_n হচ্ছে n এর সকল গুণিতকের সেট।

(i) $A_1 \cap A_2 = \{ 2, 4, 6, ...\} = A_2,\ A_2 \cap A_3 = \{6, 12, 18 ....\} = A_6,$

$A_2 \cap A_4 = \{4, 8, 12, ...\} = A_4.$

(ii) $A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 3, ...\} = A_1,\ A_2 \cup A_4 = \{2, 4, 6 ......\} = A_2,$

$A_3 \cup A_6 = \{3, 6, 9, ... \} = A_3.$

মন্তব্য : একাধিক সেটের নামকরণে, বিশেষ করে এরূপ সেটের সংখ্যা যদি অনেক হয়, তবে সেটগুলোকে ক্রমিকভাবে A_1, A_2, A_3, ইত্যাদি নামকরণ করা সুবিধাজনক (A_n কে 'A সাব n' পড়া হয়)।

উদাহরণ ২ । যদি $A = \{1, 2, 3,\}$ এবং $B = \{2, 3, 4\}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$P (A) \cap P (B) = P (A \cap B)$

সমাধান : এখানে $A = \{1, 2, 3,\}$ এবং $B = \{2, 3, 4\}$.

সুতরাং $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

এবং $P(B) = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$

$\therefore P(A) \cap P (B) = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

এখন, $A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$

$\therefore P (A \cap B) = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

সুতরাং $P(A) \cap P (B) = P (A \cap B).$

উদাহরণ ৩ । যদি $A = \{ a, b\}$ এবং $B = \{ b , c\}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$P(A) \cup P (B) \subset P(A \cap B).$

সমাধান ঃ এখানে $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ এবং $P (B) = \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$

$\therefore P(A) \cup P (B) = \{ \{ a, b\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing\}$

আবার $A \cup B = \{ a, b, c\}$

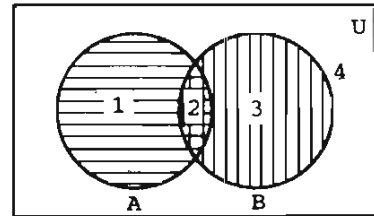
$\therefore P(A \cup B) = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \varnothing\}$

সুতরাং $P (A) \cup P (B) \subset P (A \cap B)$

উদাহরণ ৪ । ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখাও যে,

$(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$

সমাধান : একটি আয়তক্ষেত্র দ্বারা সার্বিক সেট U এবং দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তক্ষেত্র দ্বারা A ও B সেট চিত্রিত করি।

এতে সার্বিক সেট চারটি এলাকায় বিভক্ত হল যাদের 1, 2, 3, 4 দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে।

এখন আমরা লক্ষ করি,

সেট	এলাকা		সেট	এলাকা
$A \setminus B$ $(B \setminus A)$	1 3		$A \cup B$ $A \cap B$	1, 2, 3 2
$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	1,3		$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$	1, 3

$\therefore (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$

উদাহরণ ৫ । যদি $A = \{a, b\}, B = \{1, 2\}$ এবং $C = \{2, 3\}$ হয়, তবে দেখাও যে,

(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

সমাধান : (1) এখানে $B \cup C = \{1, 2, 3\}$

সুতরাং $A \times (B \cup C) = \{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$

$= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

আবার $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

এবং $A \times C = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\}$

সুতরাং $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

$\therefore A \times (B \cap C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(2) এখানে $B \cap C = \{2\}$

সুতরাং $A \times (B \cap C) = \{a, b\} \times \{2\}$

$= \{(a, 2), (b, 2)\}$

আবার $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(a, 2), \{b, 2)\}$

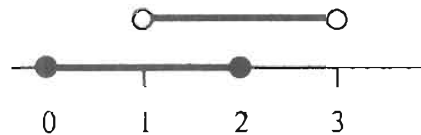
$\therefore A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

উদাহরণ ৬ । $A = [0, 2]$ এবং $B =]1, 3[$ বাস্তব সংখ্যার দুইটি ব্যবধি। $A \cup B$ এবং $A \cap B$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ব্যবধি দুইটিকে একই সংখ্যারেখায় (চিত্রে প্রদর্শিত পন্থায়) চিত্রিত করি।

চিত্র থেকে দেখা যায় যে,

$A \cup B = [\ 0, 3\ [$

$A \cap B =]\ 1, 2]$.

অনুশীলনী ১.১

১। যদি $A = [-3, 7]$, $B = [-2, 5[$, $C =]0, 2[$, $D =]-5, 3]$ এবং $E = [2, 9]$ হয়, তবে এদের কোনটি কার প্রকৃত উপসেট তা নির্ণয় কর।

২। যদি $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3\}$ এবং $D = \{1, 3\}$ হয়, তবে দেখাও যে, $P(A) = \{A, B, C, D, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\}$.

৩। যদি $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{2, 5\}$ হয়, তবে দেখাও যে,
(1) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ (2) $P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$

৪। যদি $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ এবং $C = \{3, 4\}$ হয়, তবে দেখাও যে,
(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
(2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

৫। যদি $S = \{x : x \in \mathbf{R}$ এবং $x(x-1) = x^2 - x\}$ হয়, তবে S এবং $S' = \mathbf{R} \setminus S$ নির্ণয় কর।

৬। যদি $S = \{x : x \in \mathbf{R}$ এবং $x^2 + 1 = 0\}$ হয়, তবে S এবং $S' = \mathbf{R} \setminus S$ নির্ণয় কর।

৭। নিম্নোক্ত প্রত্যেক ক্ষেত্রে A অথবা B সেটের উপর শর্ত আরোপ কর যেন উক্তিটি সত্য হয় (U সার্বিক সেট) :
(ক) $A \cup B = \varnothing$ (খ) $A \cup \varnothing = \varnothing$ (গ) $A \cap U = U$
(ঘ) $A \cup B = A$ (ঙ) $A \cup \varnothing = U$ (চ) $A' \cap U = U$
(ছ) $A \cap B = A$ (জ) $A' \cup \varnothing = \varnothing$ (ঝ) $A \cup B = A \cap B$

৮। ভেন চিত্রের সাহায্যে দেখাও যে,
ক) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(খ) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(গ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(ঘ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

৯। $A = [-5, 5]$, $B =]2, 7[$, $C = [0, 3[$, $D = [3, 5]$ বাস্তব সংখ্যা $\mathbf{R}$ এর কয়েকটি ব্যবধি। সংখ্যারেখা ব্যবহার করে $A \cup E$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $C \cup D$, $C \cap D$ নির্ণয় কর এবং তাদের সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

১০। সংখ্যারেখা ব্যবহার করে $\mathbf{R}$ এর নিম্নোক্ত সেটগুলো নির্ণয় কর :
(ক) $[-5, 5] \cup]2, 7[$ (খ) $[0, 3[\cup [3, 5]$
(গ) $]-1, 3[\cap [0, 5]$ (ঘ) $[1, 3[\cap [3, 5[$

১১। $\varnothing$, $A = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{0, 1, 2\}$, $D = \{0, 1, 2, 3\}$ সেটগুলোর জন্য নিম্নোক্ত উক্তির সত্যতা যাচাই কর :
কোনো সেটে n সংখ্যক বিভিন্ন সদস্য থাকলে সেই সেটের 2^n সংখ্যক বিভিন্ন উপসেট আছে।

১.২। সেট প্রক্রিয়া সংক্রান্ত কতিপয় প্রতিজ্ঞা

প্রতিজ্ঞা ১ : A যে কোনো সেট হলে $A \subset A$.

প্রমাণ : যেহেতু $x \in A$ হলে অবশ্যই $x \in A$, সুতরাং উপসেটের সংজ্ঞানুসারে $A \subset A$.

প্রতিজ্ঞা ২ : ফাঁকা সেট $\varnothing$ যে কোনো সেট A এর উপসেট অর্থাৎ, $\varnothing \subset A$, যেখানে A যে কোনো সেট।

প্রমাণ : মনে করি, $\varnothing \not\subset A$. সুতরাং সংজ্ঞানুসারে, এমন x আছে যেন $x \in \varnothing$ কিন্তু $x \notin A$. কিন্তু শূন্য সেটে আদৌ কোনো উপাদান নেই।

$\therefore\ \varnothing \not\subset A$ সত্য নয়।

$\therefore\ \varnothing \subset A$.

প্রতিজ্ঞা ৩ : A ও B যে কোনো সেট হলে $A = B$ হয় যদি ও কেবল যদি $A \subset B$ এবং $B \subset A$ হয়।

প্রমাণ : প্রথমে মনে করি, $A \subset B$ এবং $B \subset A$ । $A \subset B$ হওয়ায়, উপসেটের সংজ্ঞানুসারে, A এর সকল সদস্য B এর সদস্য। একইভাবে $B \subset A$ হওয়ায় B এর সকল সদস্য A এরও সদস্য।

সুতরাং সমান সেটের সংজ্ঞানুসারে $A = B$.

এখন মনে করি, $A = B$, তাহলে সমান সেটের সংজ্ঞানুসারে A এর সকল সদস্য B এর সদস্য এবং B এর সকল সদস্য A এর সদস্য। সুতরাং উপসেটের সংজ্ঞানুসারে $A \subset B$ এবং $B \subset A$

প্রতিজ্ঞা ৪ : যদি $A \subset \varnothing$ হয়, তবে $A = \varnothing$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $A \subset \varnothing$ আবার আমরা জানি, $\varnothing \subset A$. সুতরাং $A = \varnothing$ [প্রতিজ্ঞা ৩ থেকে]।

প্রতিজ্ঞা ৫ : যদি $A \subset B$ এবং $B \subset C$ হয়, তবে $A \subset C$

প্রমাণ : মনে করি, $x \in A$. তাহলে $x \in B$ [$\because$ $A \subset B$]

$\therefore\ x \in C$ [$\because$ $B \subset C$].

সুতরাং $A \subset C$.

প্রতিজ্ঞা ৬ : A এবং B যে কোন সেট হলে, $A \subset A \cup B$ এবং $B \subset A \cup B$.

প্রমাণ : সেট সংযোগের সংজ্ঞানুযায়ী A সেটের সকল উপাদান $A \cup B$ সেটে থাকে। সুতরাং উপসেটের সংজ্ঞানুযায়ী $A \subset A \cup B$.

একই যুক্তিতে $B \subset A \cup B$.

প্রতিজ্ঞা ৭ : A এবং B যে কোনো সেট হলে, $A \cap B \subset A$ এবং $A \cap B \subset B$.

প্রমাণ : ধরি, $x \in A \cap B$. তাহলে ছেদের সংজ্ঞানুসারে $x \in A$ এবং $x \in B$. সুতরাং উপসেটের সংজ্ঞানুযায়ী $A \cap B \subset A$ এবং $A \cap B \subset B$.

প্রতিজ্ঞা ৮ : A এবং B যে কোনো সেট হলে,

(ক) $A \cup B = B \cup A$

(খ) $A \cap B = B \cap A$.

প্রমাণ : (ক) সংজ্ঞানুসারে, $A \cup B = \{ x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$

$= \{ x : x \in B$ অথবা $x \in A\}$

$= B \cup A$

(খ) সংজ্ঞানুসারে, $A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$

$= \{x : x \in B$ এবং $x \in A\}$

$= B \cap A.$

দ্রষ্টব্য ১। এই প্রতিজ্ঞা থেকে দেখা যায় যে, সেটের সংযোগ ও ছেদ প্রক্রিয়া বিনিময় নিয়ম মানে।

দ্রষ্টব্য ২। এই প্রতিজ্ঞা থেকে দেখা যায় যে, সেটের সংযোগ ও ছেদ প্রক্রিয়া সহযোজন নিয়ম মানে। সেজন্য

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ লেখা চলে।

প্রতিজ্ঞা ৯ : A, B, C যে কোনো সেট হলে,

(ক) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

(খ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C).$

প্রমাণ : (ক) মনে করি, $x \in A \cup (B \cup C)$

তাহলে, $x \in A$ অথবা $x \in B \cup C$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা ($x \in B$ অথবা $x \in C$)

$\Rightarrow$ ($x \in A$ অথবা $x \in B$) অথবা ($x \in A$ অথবা $x \in C$)

$\Rightarrow x \in A \cup B$ অথবা $x \in A \cup C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cup (A \cup C)$

$\therefore A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup (A \cup C)$

আবার মনে করি, $x \in (A \cup B) \cup (A \cup C)$

তাহলে, $x \in A \cup B$ অথবা $x \in A \cup C$

$\Rightarrow$ ($x \in A$ অথবা $x \in B$) অথবা ($x \in A$ অথবা $x \in C$)

$\Rightarrow x \in A$ অথবা ($x \in B$ অথবা $x \in C$)

$\Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

$\therefore (A \cup B) \cup (A \cup C) \subset A \cup (B \cup C)$

সুতরাং $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

(খ) একই ভাবে নিজে কর।

দ্রষ্টব্য ৩। উপরের প্রমাণে "$\Rightarrow$" চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে। P, Q গাণিতিক উক্তি হলে, $P \Rightarrow Q$ অর্থ হচ্ছে যে, উক্তি P থেকে উক্তি Q পাওয়া যায় অর্থাৎ, P সত্য হলে Q সত্য হয়। এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে,

$P \Rightarrow Q$ এবং $Q \Rightarrow R$ হলে $P \Rightarrow R$.

প্রতিজ্ঞা ১০ : A, B, C যে কোনো সেট হলে,

(ক) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(খ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

প্রমাণ : (ক) মনে করি, $x \in A \cup (B \cap C)$

তাহলে, $x \in A$ অথবা $x \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $(x \in B$ এবং $x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A$ অথবা $x \in B$ এবং $(x \in A$ অথবা $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A \cup B$ এবং $x \in A \cup C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\therefore A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

আবার মনে করি, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

তাহলে, $x \in A \cup B$ এবং $x \in A \cup C$

$\Rightarrow (x \in A$ অথবা $x \in B)$ এবং $(x \in A$ অথবা $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $(x \in B$ এবং $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $x \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

$\therefore (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

সুতরাং $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(খ) একইভাবে নিজে কর।

দ্রষ্টব্য ৪। এ প্রতিজ্ঞা থেকে দেখা যায় যে, সেটের সংযোগ ও ছেদ প্রক্রিয়া দুইটির প্রত্যেকটি অপরটির প্রেক্ষিতে বণ্টন নিয়ম মানে।

প্রতিজ্ঞা ১১। সার্বিক সেট U এর যে কোনো উপসেট A ও B এর জন্য

(ক) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(খ) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

প্রমাণ : (ক) মনে করি, $x \in (A \cup B)'$

তাহলে, $x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A'$ এবং $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A' \cap B'$

$\therefore (A \cup B)' \subset A' \cap B'$

আবার মনে করি, $x \in A' \cap B'$

তাহলে, $x \in A'$ এবং $x \in B'$

$\Rightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)'$

$\therefore A' \cap B' \subset (A \cup B)'$

সুতরাং $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

(খ) অনুরূপভাবে নিজে কর।

মন্তব্য : এই প্রতিজ্ঞাকে দ্য মরগ্যানের সূত্র (De Morgans Law) নামে অভিহিত করা হয়।

প্রতিজ্ঞা ১২। সার্বিক সেট U এর যে কোনো উপসেট A ও B এর জন্য $A \setminus B = A \cap B'$

প্রমাণ : মনে করি, $x \in A \setminus B$

তাহলে $x \in A$ এবং $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B'$

$\therefore x \in A \cap B'$

$\therefore A \setminus B \subset A \cap B'$

আবার মনে করি, $x \in A \cap B'$

তাহলে $x \in A$ এবং $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \notin B$

$\therefore x \in A \setminus B$

$\therefore A \cap B' \subset A \setminus B$

সুতরাং $A \setminus B = A \cap B'$

প্রতিজ্ঞা ১৩ : যে কোন সেট A, B, C এর জন্য

(ক) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(খ) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

প্রমাণ : (ক) সংজ্ঞানুসারে,

$A \times (B \cap C) = \{(x, y) : x \in A, y \in B \cap C\}$

$= \{(x, y) : x \in A, y \in B$ এবং $y \in C\}$

$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times B$ এবং $(x, y) \in A \times C\}$

$= (A \times B) \cap (A \times C).$

(খ) অনুরূপভাবে নিজে কর।

অনুশীলনী ১.২

[এখানে সকল সেট সার্বিক সেট U এর উপসেট বিবেচনা করতে হবে]

১। দেখাও যে : (ক) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

(খ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

২। দেখাও যে, $A \subset B$ হবে যদি এবং কেবল যদি নিম্নোক্ত যে কোনো একটি শর্ত খাটে :

(ক) $A \cap B = A$ (খ) $A \cup B = B$ (গ) $B' \subset A$

(ঘ) $A \cap B' = \varnothing$ (ঙ) $B \cup A' = U.$

৩। দেখাও যে, (ক) $A \setminus B \subset A \cup B$ (খ) $A' \setminus B' = B \setminus A$

(গ) $A \setminus B \subset A$ (ঘ) $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$

(ঙ) $A \subset B$ হলে, $A \cup (B \setminus A) = B$

(চ) $A \cap B = \varnothing$ হলে, $A \subset B', A \cap B' = A$ এবং $A \cup B' = B'$

৪। দেখাও যে, (ক) $A \cup B = \varnothing$ হলে, $A = \varnothing$ এবং $B = \varnothing$

(খ) $\varnothing \cup A = A$ (গ) $A \cup A' = U$

(ঘ) $A \cap A' = \varnothing$ (ঙ) $U' = \varnothing$

(চ) $\varnothing' = U$

৫। দেখাও যে, (ক) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(খ) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(গ) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(ঘ) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$

(ঙ) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$

৬। দেখাও যে, (ক) $A \setminus A = \varnothing$ (খ) $A \setminus (A \setminus A) = A.$

৭। দেখাও যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

৮। যদি $A \subset B$ এবং $C \subset D$ হয়, তবে দেখাও যে, $(A \times C) \subset (B \times D)$

১.৩। সেটের সমতুল্যতা এবং সান্ত ও অনন্ত সেট

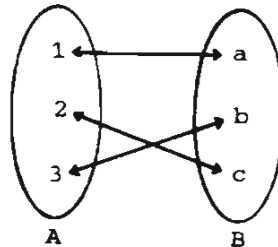
এক-এক মিল (One-one correspondence)

মনে করি, $A = \{a, b, c\}$ তিনজন লোকের সেট এবং $B = \{30, 40, 50\}$ ঐ তিনজন লোকের বয়সের সেট। অধিকন্তু মনে করি, a এর বয়স 30, b এর বয়স 40 এবং c এর বয়স 50.

সুতরাং বলা যায় যে, A সেটের সাথে B সেটের এক-এক মিল আছে।

সংজ্ঞা : যদি A সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে B সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদান এবং B সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে A সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদানের মিল স্থাপন করা হয়, তবে তাকে A ও B সেটের মধ্যে একটি এক-এক মিল বলা হয়। A ও B এর মধ্যে এক-এক মিলকে সাধারণত $A \leftrightarrow B$ লিখে প্রকাশ করা হয় এবং A সেটের কোনো সদস্য x এর সঙ্গে B সেটের যে সদস্য y এর মিল করা হয়েছে তা $x \leftrightarrow y$ লিখে বর্ণনা করা হয়।

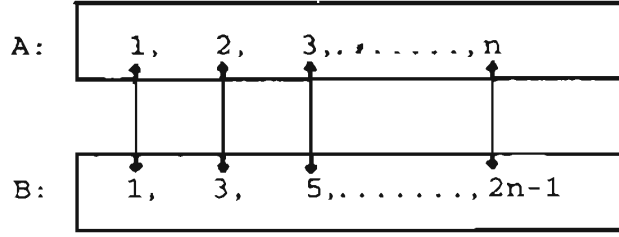
সমতুল সেট (Equivalent sets)

ধরি, $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{a, b, c\}$ দুইটি সেট। নিচের চিত্রে A ও B সেটদ্বয়ের মধ্যে একটি এক-এক মিল স্থাপন চিত্রিত করে দেখানো হল :

প্রদত্ত সেটদ্বয়ের মধ্যে আরও পাঁচভাবে এক-এক মিল স্থাপন করা যায়।

সংজ্ঞা : যে কোনো সেট A ও B এর মধ্যে যদি একটি এক-এক মিল $A \leftrightarrow B$ বর্ণনা করা যায়, তবে A ও B কে সমতুল সেট বলা হয়।

A ও B সেট সমতুল বোঝাতে অনেক সময় $A \sim B$ প্রতীক লেখা হয়। $A \sim B$ প্রতীক হলে, এদের যে কোন একটিকে অপরটির সাথে সমতুল বলা হয়।

উদাহরণ ১। দেখাও যে, $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ এবং $B = \{1, 3, 5, ..., 2n - 1\}$ সেটদ্বয় সমতুল, যেখানে n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

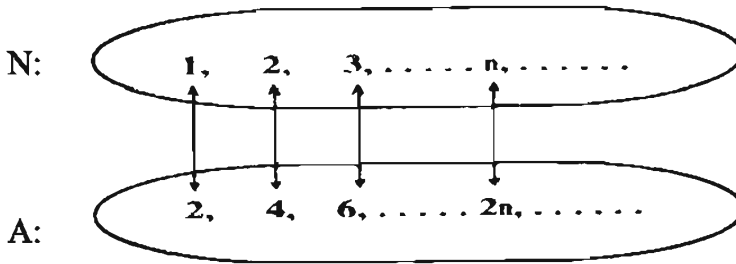
সমাধান : A ও B সেট দুইটির মধ্যে একটি এক-এক মিল নিম্নের চিত্রে দেখানো হল :

সুতরাং A ও B সেট দুইটি সমতুল।

মন্তব্য : উপরের চিত্রিত এক-এক মিলটিকে $A \leftrightarrow B : K \leftrightarrow 2k - 1, K \in A$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

উদাহরণ : দেখাও যে, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এবং জোড় সংখ্যার সেট

$A = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$ সমতুল।

সমাধান : এখানে $N = \{1, 2, 3, ...n ....\}$

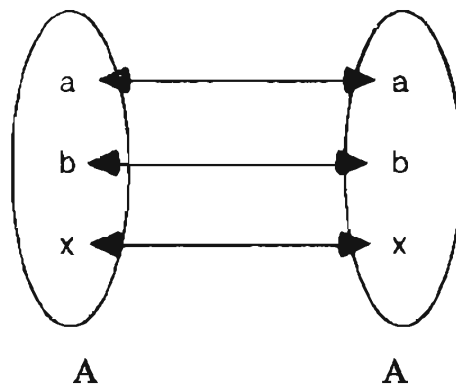
N এবং A এর মধ্যে একটি এক-এক মিল নিম্নের চিত্রে দেখানো হল :

সুতরাং N ও A সমতুল সেট।

মন্তব্য : উপরে চিত্রিত এক-এক মিলটিকে $N \leftrightarrow A : n \leftrightarrow 2n, n \in N$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

দ্রষ্টব্য : ফাঁকা সেট $\varnothing$ কে তার নিজের সমতুল ধরা হয়। অর্থাৎ, $\varnothing \sim \varnothing$

প্রতিজ্ঞা ১। প্রত্যেক সেট A তার নিজের সমতুল।

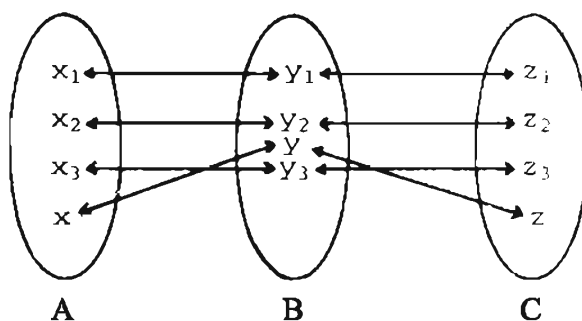
প্রমাণ : $A = \varnothing$ হলে, $A \sim A$ ধরা হয়।

মনে করি, $A \neq \varnothing$.

A সেটের প্রত্যেক সদস্য x এর সঙ্গে তার নিজেকে মিল করা হলে এক-এক মিল

$A \leftrightarrow A$ ঃ $x \leftrightarrow x$, $x \in A$ স্থাপিত হয়।

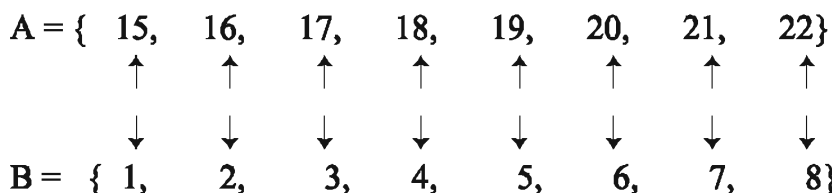
সুতরাং $A \sim A$.

প্রতিজ্ঞা ২। যদি A ও B সমতুল সেট হয় এবং B ও C সমতুল সেট হয়, তবে A ও C সমতুল সেট হয়।

প্রমাণ : যেহেতু $A \sim B$, সুতরাং A এর প্রত্যেক সদস্য x এর সঙ্গে B এর একটি অনন্য সদস্য y এর মিল করা যায়। আবার যেহেতু $B \sim C$, সুতরাং B এর এই সদস্য y এর সঙ্গে C এর একটি অনন্য সদস্য z এর মিল করা যায়। এখন A এর এ সদস্য x এর সঙ্গে C এর এ সদস্য z এর মিল করা হলে

A ও C সেটের মধ্যে একটি এক-এক মিল স্থাপিত হয়। অর্থাৎ, $A \sim C$ হয়।

সান্ত ও অনন্ত সেট (Finite and Infinite Sets)

$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\}$ সেটটির সদস্যগুলো "গণনা" করে দেখা যায় যে, A সেটের "সদস্য সংখ্যা" ৪। এই "গণনা কাজ" A সেটের সঙ্গে $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ সেটের একটি এক-এক মিল স্থাপন করে সম্পন্ন করা হয়। যেমন,

$$
\begin{array}{lcccccccc}
A = \{ & 15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20, & 21, & 22\} \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
B = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8\}
\end{array}
$$

এরূপ গণনা করে যে সকল সেটের সদস্য সংখ্যা নির্ধারণ করা যায়, তাদের সান্ত সেট বলা হয়। ফাঁকা সেটকেও সান্ত সেট ধরা হয়।

সংজ্ঞা : (ক) ফাঁকা সেট $\varnothing$ সান্ত সেট এবং $\varnothing$ এর সদস্য সংখ্যা 0.

(খ) যদি কোনো সেট A এবং $J_m = \{1, 2, 3, ..., m\}$ সমতুল হয় যেখানে $m \in N$, তবে A একটি সান্ত সেট এবং A এর সদস্য সংখ্যা m.

(গ) A কোনো সান্ত সেট হলে, A এর সদস্য সংখ্যাকে n (A) দ্বারা সূচিত করা হয়।

(ঘ) কোনো সেট A সান্ত সেট না হলে, তাকে অনন্ত সেট বলা হয়।

দ্রষ্টব্য ১। $J_1 = \{1\}, J_2 = \{1, 2\}, J_3 = \{1, 2, 3\}$ ইত্যাদি প্রত্যেকেই N এর সান্ত উপসেট এবং $n(J_1) = 1, n(J_2) = 2, n(J_3) = 3$, ইত্যাদি। বাস্তবিক পক্ষে, $J_m \sim J_m$ (এই অনুচ্ছেদের প্রতিজ্ঞা ১ দ্রষ্টব্য) এবং $n(J_m) = m$.

দ্রষ্টব্য ২। শুধুমাত্র সান্ত সেটেরই সদস্য সংখ্যা নির্দিষ্ট করা যায়। অনন্ত সেটের সদস্য সংখ্যা নির্দিষ্ট করা যায় না। সুতরাং n(A) লিখলে বুঝতে হবে A সান্ত সেট।

দ্রষ্টব্য ৩। A ও B সমতুল সেট এবং এদের মধ্যে একটি সেট সান্ত হলে অপর সেটটিও সান্ত হবে এবং $n(A) = n(B)$ হবে।

নিম্নে দুইটি প্রতিজ্ঞা প্রমাণ ব্যতিরেকে উল্লেখ করা হল :

প্রতিজ্ঞা ৩। যদি A সান্ত সেট হয় এবং B, A এর প্রকৃত উপসেট হয়, তবে B সান্ত সেট হবে এবং $n(B) < n(A)$ হবে।

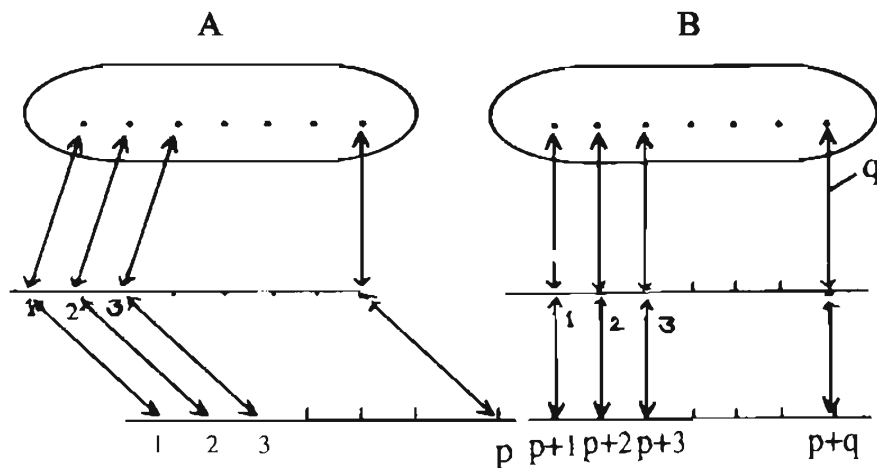
প্রতিজ্ঞা ৪। A অনন্ত সেট হয় যদি ও কেবল যদি A এবং A এর একটি প্রকৃত উপসেট সমতুল হয়।

সুতরাং কোনো সান্ত সেট ও তার কোনো প্রকৃত উপসেট কখনই সমতুল হতে পারে না।

দ্রষ্টব্য ৫। N একটি অনন্ত সেট (এই অনুচ্ছেদের উদাহরণ ২ দ্রষ্টব্য)।

১.৪। সান্ত সেটের উপাদান সংখ্যা

পূর্ব অনুচ্ছেদে সান্ত সেট A এর উপাদান সংখ্যাকে n(A) দ্বারা সূচিত করা হয়েছে এবং n(A) নির্ধারণের পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

মনে করি, $n(A) = p > 0, n(B) = q > 0$, যেখানে $A \cap B = \varnothing$.

উপরের চিত্রে বর্ণিত এক-এক মিল থেকে দেখা যায় যে, $A \cup B \sim J_{p+q}$

অর্থাৎ, $n(A \cup B) = p + q = n(A) + n(B)$.

এ থেকে বলা যায় যে,

প্রতিজ্ঞা ১। যদি A ও B পরস্পর নিশ্ছেদ সান্ত সেট হয়, তবে $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ এই প্রতিজ্ঞাকে সম্প্রসারণ করে বলা যায় যে,

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$ ইত্যাদি, যেখানে A, B, C, D সেটগুলো পরস্পর নিশ্ছেদ সান্ত সেট।

প্রতিজ্ঞা ২। যে কোনো সান্ত সেট A ও B এর জন্য $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

প্রমাণ :

এখানে $A \setminus B$, $A \cap B$ এবং $B \setminus A$ সেট তিনটি পরস্পর নিশ্ছেদ সেট [ভেনচিত্রে দ্রষ্টব্য] এবং

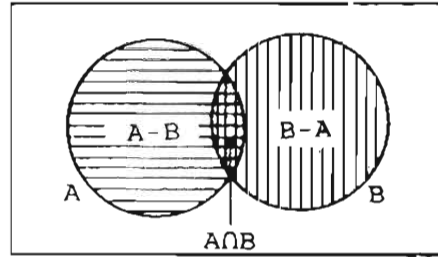
$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

$\therefore n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B)$ (i)

$n(B) = n(B \setminus A) + n(A \cap B)$ (ii)

$n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(B \setminus A) + n(A \cap B)$ (iii)

ধরি, $n(A) = p$, $n(B) = q$ এবং $n(A \cap B) = r$.

সুতরাং, (i) থেকে, $n(A \setminus B) = p - r$.

(ii) থেকে, $n(B \setminus A) = q - r$.

$\therefore$ (iii) থেকে, $n(A \cup B) = (p - r) + r + (q - r)$

$= p + q - r$

$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

উদাহরণ। 50 জন লোকের মধ্যে 35 জন ইংরেজি বলতে পারে, 25 জন ইংরেজি ও বাংলা বলতে পারে এবং প্রত্যেকেই দুইটি ভাষার অন্তত একটি বলতে পারে। বাংলা বলতে পারে কত জন? কেবল মাত্র বাংলা বলতে পারে কত জন?

সমাধান ঃ

মনে করি, সকল লোকের সেট S এবং তাদের মধ্যে যারা ইংরেজি বলতে পারে তাদের সেট E ও যারা বাংলা বলতে পারে তাদের সেট B। তাহলে প্রশ্নানুসারে :

$n(S) = 50, n(E) = 35, n(E \cap B) = 25$ এবং $S = E \cup B$,

মনে করি, $n(B) = x$

তাহলে, $n(S) = n(E \cup B) = n(E) + n(B) - n(E \cap B)$ থেকে পাই,

$50 = 35 + x - 25$

বা, $x = 50 - 35 + 25 = 40$

অর্থাৎ, $n(B) = 40$

$\therefore$ বাংলা বলতে পারে 40 জন।

এখন, যারা কেবলমাত্র বাংলা বলতে পারে তাদের সেট হচ্ছে $B \setminus E$.

মনে করি, $n(B \setminus N) = y$.

যেহেতু $E \cap B$ এবং $B \setminus E$ নিশ্ছেদ এবং

$B = (E \cap B) \cup (B \setminus E)$ [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]

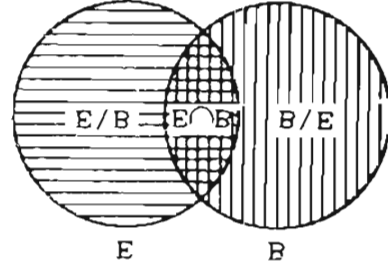
সুতরাং $n(B) = n(E \cap B) + n(B \setminus E)$

$\therefore 40 = 25 + y$

$\therefore$ বা, $y = 40 - 25 = 15$

অর্থাৎ, $n(B \setminus E) = 15$

$\therefore$ কেবলমাত্র বাংলা বলতে পারে 15 জন।

অতএব, বাংলা বলতে পারে 40 জন এবং কেবলমাত্র বাংলা বলতে পারে 15 জন।

অনুশীলনী ১.৩

১। নিম্নোক্ত প্রত্যেক ক্ষেত্রে A ও B এর মধ্যে সম্ভাব্য সকল এক-এক মিল বর্ণনা কর :

(ক) $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$,

(খ) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

২। ১ নং প্রশ্নে বর্ণিত প্রত্যেক এক-এক মিলকরণের জন্য

$F = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B$ এবং $x \leftrightarrow y\}$ সেটটি তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা কর।

৩। মনে কর, $A = \{a, b, c, d\}$, এবং $B = \{1, 2, 3, 4\}$।

$A \times B$ এর একটি উপসেট বর্ণনা কর যার অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম পদের সঙ্গে দ্বিতীয় পদের মিল করা হলে ও এর মধ্যে একটি এক-এক মিল স্থাপিত হয় যেখানে $a \leftrightarrow 3$.

৪। দেখাও যে, $A = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots., n\}$ এবং $B = \{1, 2, 2^2, \ldots\ldots, 2^{n-1}\}$ সেট দুইটি সমতুল।

৫। দেখাও যে, $S = \{3^n : n = 0$ অথবা $n \in N\}$ সেটটি N -এর সমতুল।

৬। ৫নং প্রশ্নে বর্ণিত S সেটের একটি প্রকৃত উপসেট বর্ণনা কর যা S এর সমতুল।

৭। দেখাও যে, সকল বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots.\}$ একটি অনন্ত সেট।

৮। দেখাও যে, স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের বর্গের সেট $S = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots..\}$ একটি অনন্ত সেট।

৯। প্রমাণ কর যে, $n(A) = p$, $n(B) = q$ এবং $A \cap B = \varnothing$ হলে, $n(A \cup B) = p + q$.

১০। প্রমাণ কর যে, A, B, C সান্ত সেট হলে,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C).$$

১১। কোন শ্রেণীর 30 জন ছাত্রের 20 জন ফুটবল এবং 15 জন ক্রিকেট পছন্দ করে। প্রত্যেক ছাত্র দুইটি খেলার অন্তত একটি খেলা পছন্দ করে। কত জন ছাত্র দুইটি খেলাই পছন্দ করে?

১২। কিছু সংখ্যক লোকের মধ্যে 50 জন বাংলা, 20 জন ইংরেজি এবং 10 জন বাংলা ও ইংরেজি বলতে পারে। দুইটি ভাষার অন্তত একটি ভাষা কত জন বলতে পারে?

১৩। কোন স্কুলের নবম শ্রেণীর মানবিক শাখার 50 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 29 জন পৌরনীতি, 24 জন ভূগোল এবং 11 জন পৌরনীতি ও ভূগোল উভয় বিষয়ই নিয়েছে। কত জন শিক্ষার্থী পৌরনীতি বা ভূগোল বিষয় দুইটির কোনটিই নেয়নি?

১৪। কোন শ্রেণীর 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন নিয়েছে অর্থনীতি, 17 জন নিয়েছে ভূগোল, 11 জন নিয়েছে পৌরনীতি,12 জন নিয়েছে অর্থনীতি ও ভূগোল, 7 জন নিয়েছে অর্থনীতি ও পৌরনীতি, 5 জন নিয়েছে ভূগোল ও পৌরনীতি এবং 2 জন নিয়েছে সবগুলো বিষয়। কত জন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি?

১৫। কোন শ্রেণীর শিক্ষার্থীদের মধ্যে 28 জন অর্থনীতি, 23 জন পৌরনীতি, 23 জন ভূগোল, 12 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি, 11 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 8 জন পৌরনীতি ও ভূগোল এবং 5 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। প্রত্যেক শিক্ষার্থীকেই উক্ত বিষয়গুলো অন্তত একটি নিতে হয়েছে। ঐ শ্রেণীর শিক্ষার্থী সংখ্যা কত?

১৬। ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের আধুনিক ভাষা ইনস্টিটিউটের 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 42 জন ফ্রেঞ্চ, 30 জন জার্মান, 28 জন স্প্যানিশ নিয়েছে। 10 জন নিয়েছে ফ্রেঞ্চ ও স্প্যানিশ, 8 জন নিয়েছে জার্মান ও স্প্যানিশ, 5 জন নিয়েছে জার্মান ও ফ্রেঞ্চ, 3 জন শিক্ষার্থী তিনটি ভাষাই নিয়েছে।

১। কত জন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার একটিও নেয়নি?

২। কত জন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল একটি ভাষা নিয়েছে?

৩। কত জন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল দুইটি ভাষা নিয়েছে?

১৭। আনোয়ারা মহাবিদ্যালয়ের ছাত্রীদের মধ্যে বিচিত্রা, সন্ধানী ও পূর্বাণী পত্রিকায় পাঠাভ্যাস সম্পর্কে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল 60% ছাত্রী বিচিত্রা পড়ে, 50% ছাত্রী সন্ধানী পড়ে, 50% ছাত্রী পূর্বাণী পড়ে, 30% ছাত্রী বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে, 30% ছাত্রী বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে, 20% ছাত্রী সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে এবং 10% ছাত্রী তিনটি পত্রিকাই পড়ে।

১। শতকরা কত জন ছাত্রী উক্ত পত্রিকা তিনটির কোনটিই পড়ে না?

২। শতকরা কত জন ছাত্রী উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুইটি পড়ে?

১৮। কলেজ গেট পঙ্গু মুক্তিযোদ্ধা পুনর্বাসন কেন্দ্রের অধিবাসীদের মধ্যে 70% পঙ্গু মুক্তিযোদ্ধার একটি চোখ, 80% পঙ্গু মুক্তিযোদ্ধার একটি কান, 75% পঙ্গু মুক্তিযোদ্ধার একটি হাত, 85% পঙ্গু মুক্তিযোদ্ধার একটি পা অকেজো বলে দেখা গেল। তাদের মধ্যে শতকরা অন্তত কত জনের উক্ত চারটি অঙ্গই অকেজো হয়েছে?

বহুনির্বাচনী ও সৃজনশীল প্রশ্নাবলী

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

১। i. কোন সেটের সদস্য সংখ্যা 2n হলে, এর উপসেটের সংখ্যা হবে 4^n

ii. সকল মূলদ সংখ্যার সেট Q = $\left\{\frac{p}{q}: pq \in Z\right\}$

iii. [a, b ∈R ;] a. b [= {x : x∈ R এবং a∠x∠b}

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (২-৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

প্রত্যেক $n \in N$ এর জন্য

$A_n = \{n, 2n, 3n, ...\}$

২। $A_1 \cap A_2$ এর মান নিচের কোনটি ?

ক. A_1 খ. A_2

গ. A_3 ঘ. A_4

৩। নিচের কোনটি $A_3 \cup A_6$ এর মান নির্দেশ করে ?

ক. A_2 খ. A_3

গ. A_4 ঘ. A_6

৪। $A_2 \cap A_3$ এর পরিবর্তে নিচের কোনটি লিখা যায়?

ক. A_3 খ. A_4

গ. A_5 ঘ. A_6

৫।

$n(A' \cap B' \cap C)$ এর মান কত ?

ক. 6 খ. 7

গ. 8 ঘ. 9

সৃজনশীল প্রশ্ন :

১। $A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - (a + b)x + ab = 0\}$

$B = \{1, 2\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$

ক. A সেটের উপাদানসমূহ নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$ [সংকেতসমূহ প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত]

গ. প্রমাণ কর যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

২। একটি শ্রেণীর 100 জন ছাত্রের মধ্যে 42 জন ফুটবল, 46 জন ক্রিকেট এবং 39 জন হকি খেলে। এদের মধ্যে 13 জন ফুটবল ও ক্রিকেট, 14 জন ক্রিকেট ও হকি এবং 12 জন ফুটবল ও হকি খেলতে পারে। এছাড়া 7 জন কোন খেলায় পারদর্শী নয়।

ক. উল্লিখিত তিনটি খেলায় পারদর্শী এমন ছাত্রদের সেট এবং কোন খেলায় পারদর্শী নয় এমন ছাত্রদের সেট ভেনচিত্রে চিহ্নিত কর।

খ. কতজন ছাত্র উল্লিখিত তিনটি খেলায় পারদর্শী তা নির্ণয় কর ।

গ. কতজন ছাত্র কেবলমাত্র একটি খেলায় পারদর্শী এবং কতজন অন্তত: দুইটি খেলায় পারদর্শী?

দ্বিতীয় অধ্যায়

বীজগাণিতিক রাশি

২.১ । বহুপদী (Polynomials)

বিভিন্ন প্রকারের বীজগাণিতিক রাশির সঙ্গে আমরা পরিচিত। এক বা একাধিক সংখ্যা ও সংখ্যা নির্দেশক প্রতীককে +, −, ×, ÷, ঘাত বা মূল চিহ্নের যে কোন একটি অথবা একাধিকের সাহায্যে অর্থবহভাবে সংযুক্ত করলে যে নতুন সংখ্যা নির্দেশক প্রতীকের সৃষ্টি হয়, তাকে বীজগাণিতিক রাশি (Algebraic expression) বা সংক্ষেপে রাশি বলা হয়। যেমন, $3x$, $2x + 3ay$, $5x + 3y^2 - a + \sqrt{z}$, $\sqrt{y} + \frac{2x + y - 7z}{3\sqrt{x - 5z}}$ ইত্যাদি প্রত্যেকেই এক একটি

বীজগাণিতিক রাশি।

এখানে সংখ্যা বলতে আমরা বাস্তব সংখ্যাই বুঝব।

A, B, C ইত্যাদি রাশিগুলোর কোনোটিই যদি একাধিক রাশির যোগফল বা বিয়োগফল না হয়, তবে তাদের প্রত্যেকটিকে $A + B + C + \ldots\ldots$ আকারের রাশির এক একটি পদ (term) বলা হয়। যেমন, $5x + 3y^2 - a + \sqrt{z}$ রাশিটিতে $5x$, $3y^2$, $-a$, $\sqrt{z}$ এক একটি পদ।

কোনো আলোচনায় সংখ্যা নির্দেশক একটি অক্ষর প্রতীক চলক (variable) বা ধ্রুবক (constant) হতে পারে। যদি এরূপ একটি প্রতীক একাধিক সদস্য বিশিষ্ট কোনো সংখ্যা সেটের যে কোনো অনির্ধারিত সদস্য নির্দেশ করে তবে প্রতীকটিকে চলক বলা হয় এবং সেটটিকে তার ডোমেন বলা হয়। যদি প্রতীকটি একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা নির্দেশ করে, তবে তাকে ধ্রুবক বলা হয়। কোনো আলোচনায় একটি চলক তার ডোমেন থেকে যে কোনো মান গ্রহণ করতে পারে। কিন্তু একটি ধ্রুবকের মান কোনো আলোচনায় নির্দিষ্ট থাকে। কোনোরূপ উল্লেখ না থাকলে আলোচনার প্রেক্ষিতে বুঝে নিতে হয় কোনো প্রতীক চলক না ধ্রুবক।

বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে এবং পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধু মাত্র অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল হয়।

এক চলকের বহুপদী

মনে করি, x একটি চলক। তাহলে,

(১) a (২) $ax + b$

(৩) $ax^2 + bx + c$ (৪) $ax^3 + bx^2 + cx + d$

ইত্যাদি আকারের রাশিকে x চলকের বহুপদী বলা হয়, যেখানে a, b, c, d ইত্যাদি নির্দিষ্ট সংখ্যা (ধ্রুবক)। সাধারণভাবে, x চলকের এটি বহুপদীর পদসমূহ Cx^p আকারের হয়, যেখানে C একটি (x − বর্জিত) নির্দিষ্ট সংখ্যা (যা শূন্যও হতে পারে) এবং p একটি অঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। (p শূন্য হলে পদটি শুধু C হয় এবং C শূন্য হলে পদটি বহুপদীতে অনুল্লেখ থাকে)। Cx^p পদে C কে x^p এর সহগ (Coefficient) এবং p কে এই পদের মাত্রা (degree) বলা হয়।

কোনো বহুপদীতে উল্লিখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে বহুপদীটির মাত্রা বলা হয়। বহুপদীতে গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদটিকে মুখ্যপদ ও মুখ্যপদের সহগকে মুখ্যসহগ এবং 0 মাত্রাযুক্ত অর্থাৎ, চলক-বর্জিত পদটিকে ধ্রুবপদ বলা হয়। যেমন,

$2x^7 - \sqrt{3x^5} - x^4 + \frac{1}{c}x - 1$, x চলকের একটি বহুপদী, যার মাত্রা 7, মুখ্যপদ $2x^7$, মুখ্যসহগ 2 এবং ধ্রুবপদ -1.

$a \neq 0$ হলে, পূর্বোক্ত (১) বহুপদীর মাত্রা 0, (২) বহুপদীর মাত্রা 1, (৩) বহুপদীর মাত্রা 2 এবং (৪) বহুপদীর মাত্রা 3। যে কোনো অশূন্য ধ্রুবক $(a \neq 0)$ x চলকের 0 মাত্রার বহুপদী ($a = ax^0$ বিবেচ্য)। 0 সংখ্যাটিকে শূন্য বহুপদী বিবেচনা করা হয় এবং শূন্য বহুপদীর মাত্রা অসংজ্ঞায়িত ধরা হয়।

x চলকের বহুপদীকে সাধারণত x এর ঘাতের অধঃক্রমে (অর্থাৎ, মুখ্যপদ থেকে শুরু করে ক্রমে ক্রমে ধ্রুবপদ পর্যন্ত) বর্ণনা করা হয়। এরূপ বর্ণনাকে বহুপদীটির আদর্শ রূপ (Standard form) বলা হয়।

ব্যবহারের সুবিধার্থে x চলকের বহুপদীকে $P(x)$, $Q(x)$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হল। যেমন,

$P(x) = 2x^2 - 7x + 5$

এরূপ প্রতীকে (x) এর উল্লেখ x এর উপর বহুপদীটির মানের নির্ভরতা নির্দেশ করে। $P(x)$ বহুপদীতে x চলকের পরিবর্তে কোন নির্দিষ্ট সংখ্যা a বসালে বহুপদীটির যে মান পাওয়া যায়, তাকে $P(a)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

উদাহরণ ১। যদি $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 8$ হয়, তবে $P(0)$, $P(1)$, $P(-2)$, $P(\frac{1}{2})$ এবং $P(a)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বহুপদীতে x এর পরিবর্তে $0, 1, -2, \frac{1}{2}$, a বসিয়ে পাই,

$P(0) = 3(0)^3 + 2(0)^2 - 7(0) + 8 = 8$

$P(1) = 3(1)^3 + 2(1)^2 - 7(1) + 8 = 6$

$P(-2) = 3(-2)^3 + 2(-2)^2 - 7(-2) + 8 = 6$

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 8 = \frac{43}{8}.$

$P(a) = 3a^3 + 2a^2 - 7a + 8$

দুই চলকের বহুপদী

$2x + 3y - 1$

$x^2 - 4xy + y^2 - 5x + 7y + 1$

$8x^3 + y^3 + 12x^2y + 6xy^2 - 6x + 2$

এগুলো x ও y চলকের বহুপদী। সাধারণভাবে এরূপ বহুপদীর পদগুলো Cx^py^q আকারের হয় যেখানে C একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা (ধ্রুবক) এবং p ও q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। Cx^py^q পদে C হচ্ছে x^py^q এর সহগ এবং $p + q$ হচ্ছে এই পদের মাত্রা। এরূপ বহুপদীতে উল্লিখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে বহুপদীটির মাত্রা বলা হয়। এরূপ বহুপদীকে $P(x,y)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন,

$P(x,y) = 8x^3 + y^3 - 4x^2 + 7xy + 2y - 5$ বহুপদীর মাত্রা 3 এবং $P(1,0) = 8 - 4 - 5 = -1$.

তিন চলকের বহুপদী

x, y ও z চলকের বহুপদীর পদগুলো $Cx^py^qz^r$ আকারের হয়, যেখানে C (ধ্রুবক) পদটির সহগ এবং p, q, r অঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। $(p + q + r)$ কে এই পদের মাত্রা এবং বহুপদীতে উল্লিখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে বহুপদীটির মাত্রা বলা হয়। এরূপ বহুপদীকে $P(x, y, z)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন,

$P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ বহুপদীর মাত্রা 3 এবং $P(1, 1, -2) = 1 + 1 - 8 + 6 = 0$.

দুইটি বহুপদীর যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ

বীজগাণিতিক রাশি হিসেবে দুইটি বহুপদীর যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ সম্পর্কে আমরা আগেই জেনেছি। দুইটি

বহুপদীর যোগফল, বিয়োগফল এবং গুণফল সবসময় বহুপদী হয়। কিন্তু বহুপদীর ভাগফল বহুপদী হতেও পারে অথবা নাও হতে পারে।

ভাগ সূত্র : যদি $D(x)$ ও $N(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী হয় এবং ($D(x)$ এর মাত্রা) $\leq$ ($N(x)$ এর মাত্রা) হয়, তবে সাধারণ নিয়মে $D(x)$ দ্বারা $N(x)$ কে ভাগ করে ভাগফল $Q(x)$ ও ভাগশেষে $R(x)$ পাওয়া যায়। যেখানে,

(১) $Q(x)$ ও $R(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী

(২) ($Q(x)$ এর মাত্রা) = ($N(x)$ এর মাত্রা) – ($D(x)$ এর মাত্রা)

(৩) $R(x) = 0$ অথবা ($R(x)$ এর মাত্রা) < ($D(x)$ এর মাত্রা)

(৪) সকল x এর জন্য $N(x) = D(x)\, Q(x) + R(x)$

মন্তব্য । উপরে উল্লিখিত (৪) নং নিয়মকে ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ হিসেবে উল্লেখ করা হয়।

সমতা সূত্র :

(১) যদি সকল x এর জন্য $ax + b = px + q$ হয়, তবে $x = 0$ ও $x = 1$ বসিয়ে পাই, $b = q$ এবং

$a + b = p + q$ যা থেকে দেখা যায় যে, $a = p$, $b = q$.

(২) যদি সকল x এর জন্য $ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$ হয়, তবে $x = 0$, $x = 1$ ও $x = -1$ বসিয়ে পাই, $c = r$, $a + b + c = p + q + r$ এবং $a - b + c = p - q + r$ যা থেকে দেখা যায় যে, $a = p$, $b = q$, $c = r$.

(৩) সাধারণভাবে দেখা যাবে যে, যদি সকল x এর জন্য

$a^o x^n + a_1 x^{n-1}$............ $+ a_{n-1}x + a_n = p_o x^n + p_1 x^{n-1} +$ .... $+ p_{n-1}x + p_n$ হয়, তবে $a_o = p_o$, $a_1 = p_1$ ...., $a_{n-1} = p_{n-1}$, $a_n = p_n$ অর্থাৎ, সমতা চিহ্নের উভয় পক্ষে x এর একই ঘাতে সহগদ্বয় সমান।

মন্তব্য। x চলকের n মাত্রার বহুপদীর বর্ণনায় সহগগুলোকে a_0 (a সাব-জিরো), a_1 (a সাব-ওয়ান), ইত্যাদি নেওয়া সুবিধাজনক।

দুইটি বহুপদী $P(x)$ ও $Q(x)$ সকল x এর জন্য সমান হলে, তাদের সমতাকে অভেদ বলা হয় এবং তা বোঝাতে অনেক সময় $P(x) \cong Q(x)$ লেখা হয়। এক্ষেত্রে $P(x)$ ও $Q(x)$ বহুপদী দুইটি অভিন্ন হয়। $\equiv$ চিহ্নকে অভেদ চিহ্ন বলা হয়। সাধারণভাবে, দুইটি বীজগাণিতিক রাশির সমতাকে অভেদ (identity) বলা হয়, যদি রাশি দুইটিতে কোনো চলকের ডোমেন একই হয় এবং চলকসমূহের ডোমেনভুক্ত মানের জন্য রাশি দুইটির মান সমান হয়। যেমন, $x(y + z) = xy + xz$ একটি অভেদ।

২.২ ভাগশেষ ও উৎপাদক উপপাদ্য

এই অনুচ্ছেদে শুধু x চলকের বহুপদী বিবেচনা করা হবে। প্রথমে দুইটি উদাহরণ বিবেচনা করি।

উদাহরণ ১। যদি $P(x) = x^2 - 5x + 6$ হয়, তবে $P(x)$ কে $(x - 4)$ দ্বারা ভাগ কর এবং দেখাও যে, ভাগশেষ $P(4)$ এর সমান।

সমাধান : $P(x)$ কে $x - 4$ দ্বারা ভাগ করি,

$$x - 4)\ x^2 - 5x + 6\ (x - 1$$
$$\underline{x^2 - 4x}$$

$$\begin{array}{r} -x+6 \\ \underline{-x+4} \\ 2 \end{array}$$

এখানে ভাগশেষ = 2

যেহেতু $P(4) = 4^2 - 5(4) + 6 = 2$, সুতরাং ভাগশেষ P(4) এর সমান।

উদাহরণ ২। যদি $P(x) = ax^3 + bx + c$ হয়, তবে P(x) কে $x - m$ দ্বারা ভাগ করে দেখাও যে, ভাগশেষ P(m) এর সমান।

সমাধান : P(x) কে $x - m$ দ্বারা ভাগ করি,

$$\begin{array}{l} x-m)\ ax^3 + bx + c\ (ax^2 + amx + am^2 + b \\ \qquad \underline{ax^3 - amx^2} \\ \qquad\quad amx^2 + bx + c \\ \qquad\quad \underline{amx^2 - am^2x} \\ \qquad\qquad (am^2 + b)x + c \\ \qquad\qquad \underline{(am^2 + b)x - (am^2 + b)m} \\ \qquad\qquad\qquad am^3 + bm + c \end{array}$$

এখানে ভাগশেষ = $am^3 + bm + c$

আবার $P(m) = am^3 + bm + c$, সুতরাং ভাগশেষ P(m) এর সমান।

এই উদাহরণ দুইটি থেকে নিম্নের প্রতিজ্ঞাটি সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়।

ভাগশেষ উপপাদ্য **(Remainder Theorem)**

প্রতিজ্ঞা ১। যদি P(x) ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং a কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা হয়, তবে P(x) কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ P(a) হবে।

প্রমাণ: P(x) কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ ধ্রুবক হবে, কেননা $(x - a)$ এর মাত্রা 1.

মনে করি, ভাগশেষ R এবং ভাগফল Q(x)

তাহলে, ভাগের নিয়মে, সকল x এর জন্য $P(x) = (x - a)\,Q(x) + R$ ....(1)

(1) এ $x = a$ বসিয়ে পাই,

$P(a) = 0.\,Q(a) + R = R.$

সুতরাং P(x) কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ P(a) হবে।

উদাহরণ ৩। $P(x) = x^3 - 8x^2 + 6x + 60$ বহুপদীকে $x + 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

সমাধান : যেহেতু $x + 2 = x - (-2)$,

সুতরাং ভাগশেষ $= P(-2) = (-2)^3 - 8(-2)^2 + 6(-2) + 60 = 8.$

প্রতিজ্ঞা ১। এর অনুকরণে প্রমাণ করা যায় যে,

প্রতিজ্ঞা ২। যদি $P(x)$ এর মাত্রা ধনাত্মক হয় এবং $a \neq 0$ হয়, তবে $P(x)$ কে $ax + b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $p(-\frac{b}{a})$ হবে।

উদাহরণ ৪। বহুপদী $P(x) = 36x^2 - 8x + 5$ কে $(2x - 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

সমাধান : নির্ণেয় ভাগশেষ $P(\frac{1}{2}) = 36(\frac{1}{2}) - 8(\frac{1}{2}) + 5 = 9 - 4 + 5 = 10.$

উদাহরণ ৫। যদি $P(x) = 5x^3 + 6x^2 - ax + 6$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 6 হয়, তবে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $P(x)$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$P(2) = 5(2)^3 + 6(2)^2 - 2a + 6 = 40 + 24 - 2a + 6 = 70 - 2a$

শর্তানুসারে, $70 - 2a = 6$ বা, $2a = 70 - 6 = 64$ $\therefore a = 32.$

উদাহরণ ৬। যদি $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$ হয় এবং $P(x)$ কে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0.$

সমাধান : $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8.$

এবং $P(x)$ কে $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(b) = b^3 + 5b^2 + 6b + 8.$

শর্তানুসারে, $a^3 + 5a^2 + 6a + 8 = b^3 + 5b^2 + 6b + 8$

বা, $a^3 - b^3 + 5(a^2 - b^2) + 6(a - b) = 0$

বা, $(a - b)(a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6) = 0$

$\therefore a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0.$ যেহেতু $a - b \neq 0.$

উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem)

প্রতিজ্ঞা ৩। যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং $P(a) = 0$ হয়, তবে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $x - a$ হবে।

প্রমাণ : $P(x)$ বহুপদীকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $= P(a)$ [ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী]

$= 0$ [প্রদত্ত শর্ত থেকে]

অর্থাৎ, $P(x)$ বহুপদী $x - a$ দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore x - a$ হচ্ছে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

উদাহরণ ৭। দেখাও যে, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 1$

সমাধান : এখানে $P(1) = 2(1)^3 - 5(1)^2 + 6(1) - 3 = 0$

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য থেকে দেখা যায় যে, $P(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 1$

উদাহরণ ৮। দেখাও যে, $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2$ এর একটি উৎপাদক $2x + 1.$

সমাধান : ধরি $P(x) = 4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2$

এখানে $P(-\frac{1}{2}) = 4(-\frac{1}{2})^4 - 12(-\frac{1}{2})^3 + 7(-\frac{1}{2})^2 + 3(-\frac{1}{2}) - 2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{3}{2} - 2 = 0$

সুতরাং $x - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(2x + 1)$ হচ্ছে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore$ $2x + 1$ প্রদত্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক।

উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য

প্রতিজ্ঞা ৪। যদি $P(x)$ বহুপদীর $x - a$ একটি উৎপাদক হয়, তবে দেখাও যে, $P(a) = 0$.

প্রমাণ : যেহেতু $P(x)$ বহুপদীর $x - a$ একটি উৎপাদক, সুতরাং আরেকটি বহুপদী $Q(x)$ পাওয়া যায় যেন $P(x) = (x - a)\,Q(x)$

এখানে $x = a$ বসিয়ে দেখা যায় যে, $P(a) = 0.\,Q(a) = 0$.

উদাহরণ ৯। দেখাও যে, $x - 1$ রাশিটি $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ বহুপদীর $x - 1$ একটি উৎপাদক হবে যাদি ও কেবল যদি $a + b + c + d = 0$ হয়।

সমাধান : মনে করি, $a + b + c + d = 0$

তাহলে, $P(1) = a + b + c + d = 0$ [শর্তানুসারে]

সুতরাং, $x - 1$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক [উৎপাদক উপপাদ্যের কারণে]

এবার মনে করি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $x - 1$

তবে উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে পাই, $P(1) = 0$

অর্থাৎ, $a + b + c + d = 0$

মন্তব্য : ধনাত্মক মাত্রার যে কোনো বহুপদীর $x - 1$ একটি উৎপাদক হবে যদি ও কেবল যদি বহুপদীটির সহগসমূহের সমষ্টি 0 হয়।

উদাহরণ ১০। মনে করি, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ বহুপদীর সহগগুলো পূর্ণ সংখ্যা, $a \neq 0$, $d \neq 0$, এবং $x - r$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক। দেখাও যে,

(ক) যদি r পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে r, d এর উৎপাদক হবে।

(খ) যদি $r = \frac{p}{q}$ লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশিত মূলদ সংখ্যা হয়, তবে p, d এর উৎপাদক ও q, a এর উৎপাদক হবে।

সমাধান : (ক) উৎপাদক উপপাদ্য থেকে দেখা যায় যে, $P(r) = ar^3 + br^2 + cr + d = 0$

বা, $(ar^2 + br + c)r = -d$

যেহেতু $ar^2 + br + c$, r ও d প্রত্যেকেই পূর্ণ সংখ্যা, সুতরাং r, d এর একটি উৎপাদক।

$P(r) = p(\frac{p}{q}) = a(\frac{p}{q}) + b(\frac{p}{q}) + c(\frac{p}{q}) + d = 0$

বা, $ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = 0$ ....(1)

(1) থেকে পাওয়া যায়,

$(ap^2 + bpq + cq^2)p = -dq^3$ ....(2)

এবং $(bp^2 + cpq + dq^2)q = -ap^3$ ....(3)

এখন $ap^2 + bpq + cq^2$, $bp^2 + cpq + dq^2$, p, q, d, a প্রত্যেকেই পূর্ণ সংখ্যা।
সুতরাং (2) থেকে পাওয়া যায়, p, dq^3 এর একটি উৎপাদক এবং (3) থেকে পাওয়া যায়, q, ap^3 এর একটি উৎপাদক। কিন্তু p ও q এর ± 1 ছাড়া কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই। সুতরাং p, d এর একটি উৎপাদক এবং q, a এর একটি উৎপাদক।

দ্রষ্টব্য। উপরের উদাহরণ থেকে আমরা লক্ষ করি যে, উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে পূর্ণসাংখ্যিক সহগ বিশিষ্ট বহুপদী P(x) এর উৎপাদক নির্ণয়ের জন্য প্রথমে P(r) এবং পরে $P\left(\frac{r}{s}\right)$ পরীক্ষা করা যেতে পারে, যেখানে r বহুপদীটির ধ্রুব পদের বিভিন্ন উৎপাদক ($r = \pm 1$সহ) এবং A বহুপদীটির মুখ্য সহগের

বিভিন্ন উৎপাদক ($r = \pm 1$সহ)।

উদাহরণ ১১। $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : প্রদত্ত বহুপদীর সহগসমূহ সব পূর্ণসংখ্যা এবং ধ্রুব পদ = – 6, মুখ্য সহগ = 1

এখন r যদি পূর্ণসংখ্যা হয় এবং P(x) এর যদি x – r আকারের কোনো উৎপাদক থাকে, তবে r অবশ্যই –6 এর উৎপাদক অর্থাৎ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ এর কোনটি হবে। এখন r এর এরূপ বিভিন্ন মানের জন্য P(r) পরীক্ষা করি।

$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0 \quad \therefore x - 1$, P(x) এর একটি উৎপাদক

$P(-1) = -1 - 6 - 11 - 6 \neq 0 \therefore x + 1$, P(x) এর উৎপাদক নয়

$P(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0 \therefore x - 2$, P(x) এর একটি উৎপাদক

$P(-2) = -8 - 24 - 22 - 6 \neq 0 \therefore x + 2$, P(x) এর উৎপাদক নয়

$P(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0 \therefore x - 3$, P(x) এর একটি উৎপাদক

যেহেতু P(x) এর মাত্রা 3 এবং তিনটি 1 মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে, সুতরাং P(x) এর অন্য কোনো উৎপাদক যদি থাকে তবে তা ধ্রুবক হবে।

$\therefore P(x) = K(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

যেখানে K ধ্রুবক। উভয় পক্ষে x এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ বিবেচনা করে দেখা যায় যে, K = 1,

সুতরাং $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

দ্রষ্টব্য। কোনো বহুপদী P(x) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার জন্য প্রথমে (x–r) আকারের একটি উৎপাদক নির্ণয় করে P(x) কে সরাসরি (x – r) দ্বারা ভাগ করে অথবা P(x) এর পদসমূহকে পুনর্বিন্যাস করে P(x) কে $P(x) = (x - r)\,Q(x)$ আকারে লেখা যায়। যেখানে Q(x) বহুপদীর মাত্রা P(x) এর মাত্রা থেকে 1 কম। অতঃপর Q(x) এর উৎপাদক নির্ণয় করে অগ্রসর হতে হয়।

উদাহরণ ১২। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ঃ $18x^3 + 15x^2 - x - 2$

সমাধান : মনে করি, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$

P(x) এর ধ্রুবপদ –2 এর উৎপাদকসমূহের সেট $F_1 = \{1, -1, 2, -2\}$

P(x) এর মুখ্য সহগ 18 এর উৎপাদকসমূহের সেট

$F_2 = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, 18, -18\}$

এখন P(a) বিবেচনা করি যেখানে, $a = \frac{r}{s}$ এবং $r \in F_1, s \in F_2$

$a = 1$ হলে, $P(1) = 18 + 15 - 1 - 2 \neq 0$

$a = -1$ হলে, $P(-1) = 18 + 15 + 1 - 2 \neq 0$

$a = -\frac{1}{2}$ হলে, $P(-\frac{1}{2}) = -18(\frac{1}{8}) + 15(\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} - 2$

$= -\frac{9}{4} + \frac{15}{4} + \frac{2}{1} - 2 = \frac{17}{4} - \frac{17}{4} = 0$

সুতরাং $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x + 1)$ অর্থাৎ, $(2x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $18x^3 + 15x^2 - x - 2 = 18x^3 + 9x^2 + 6x^2 + 3x - 4x - 2$

$= 9x^2(2x + 1) + 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$

$= (2x + 1)(9x^2 + 3x - 2)$

এবং $9x^2 + 3x - 2 = 9x^2 + 6x - 3x - 2 = 3x(3x + 2) - 1(3x + 2)$

$= (3x + 2)(3x - 1)$

$\therefore P(x) = (2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)$

অনুশীলনী ২.১

১। $(x + 1)^3 y + (y + 1)^2$ রাশিটিকে

(ক) x চলকের বহুপদীর আদর্শ বর্ণনা কর এবং x চলকের বহুপদী রূপে তার মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর।

(খ) y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং y চলকের বহুপদীরূপে তার মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর।

(গ) x ও y চলকের বহুপদী রূপে বিবেচনা করে তার মাত্রা নির্ণয় কর।

২। যদি $P(x) = 32x^4 - 16x^2 + 8x + 7$ হয়, তবে $P(O)$ $P(1)$, $P(-1)$ এবং $P(\frac{1}{2})$ এর মান নির্ণয় কর।

৩। যদি $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$ হয়, তবে $P(x)$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর।

৪। উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাও যে, $P(x) = 7x^3 - 8x^2 + 6x - 36$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 2$.

৫। দেখাও যে, $x - 1$ রাশিটি $2x^4 - 5x^2 + 6x - 3$ এবং $4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ বহুপদীদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদক।

৬। দেখাও যে, $x + 1$ এবং $x - 1$ উভয়ই $x^3 + 7x^2 - x - 7$ এবং $2x^4 - x^2 - 1$ বহুপদীদ্বয়ের উৎপাদক।

৭। $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 2$ হলে দেখাও যে, $a = 4$.

৮। মনে কর, $P(x) = x^n - a^n$, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক।

(ক) দেখাও যে, $(x - a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন

$P(x) = (x - a)Q(x)$ হয়।

(খ) n জোড় সংখ্যা হলে দেখাও যে, $(x + a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন $P(x) = (x + a)\, Q(x)$ হয়।

৯। মনে কর, $P(x) = x^n + a^n$, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক। n বিজোড় সংখ্যা হলে দেখাও যে, $(x + a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন,

$P(x) = (x + a)\, Q(x)$ হয়।

১০। মনে কর $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$

যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$. দেখাও যে, $(x - r)$ যদি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয় তবে $(rx - 1)$ ও $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

[এরূপ বহুপদীকে উলট বহুপদী (reciprocal polynomial) বলা হয়। n মাত্রার উলট বহুপদীতে $K = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n$ এর জন্য x^k ও x^{n-k} এর সহগ সমান।

১১। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ (ii) $x^3 + 4x^2 + x - 6$

(iii) $a^3 - a^2 - 10a - 8$ (iv) $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 8x + 5$

(v) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 8x - 10$ (vi) $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

(vii) $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$ (viii) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

(ix) $2a^3 - 3a^2 + 3a - 1$ (x) $x^3 - 9x^2y + 26xy^2 - 24y^3$

২,৩। সমমাত্রিক, প্রতিসম এবং চক্র-ক্রমিক রাশি

সমমাত্রিক বহুপদী : কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে, তাকে সমমাত্রিক বহুপদী (homogeneous polynomial) বলা হয়।

$x^2 + 2xy + 5y^2$ রাশিটি x, y চলকের দুই মাত্রার একটি সমমাত্রিক বহুপদী (এখানে প্রত্যেক পদের মাত্রা 2)।

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 5bc - 6ca$ রাশিটি a, b, c চলকের দুই মাত্রার একটি সমমাত্রিক বহুপদী।

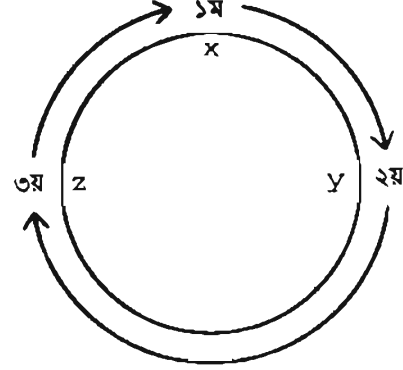
$2x^2y - y^2z + 9z^2x - 5xyz$ রাশিটি x, y, z চলকের তিন মাত্রার একটি সমমাত্রিক বহুপদী (এখানে প্রত্যেক পদের মাত্রা 3)।

$ax^2 + 2hxy + by^2$ রাশিটি x, y চলকের একটি দুই মাত্রার সমমাত্রিক রাশি, যেখানে a, h, b নির্দিষ্ট সংখ্যা। x, y, a, b, h প্রত্যেককে চলক বিবেচনা করা হলে এটি এই চলকসমূহের তিন মাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী হয়।

প্রতিসম রাশি : একাধিক চলক ধারণকারী কোনো বীজগাণিতিক রাশির যে কোন দুইটি চলকের স্থান বিনিময়ে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে, তবে রাশিটিকে ঐ চলকসমূহের প্রতিসম (symmetric) রাশি বলা হয়।

$a + b + c$ রাশিটি a, b, c চলকের প্রতিসম রাশি কারণ a, b, c চলক তিনটির যে কোনো দুইটির স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে। একইভাবে, $ab + bc + ca$ রাশিটি a, b, c চলকের এবং $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ রাশিটি x, y, z চলকের প্রতিসম রাশি। কিন্তু $2x^2 + 5xy + 6y^2$ রাশিটি x, y চলকের প্রতিসম নয় কারণ রাশিটি x ও y এর পরস্পর স্থান বিনিময়ে $2y^2 + 5xy + 6x^2$ রাশিতে পরিবর্তিত হয় যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।

চক্র-ক্রমিক রাশি

তিনটি চলক সম্বলিত কোনো বীজগাণিতিক রাশিতে প্রথম চলকের স্থলে দ্বিতীয় চলকের, দ্বিতীয় চলকের স্থলে তৃতীয় চলকের এবং তৃতীয় চলকের স্থলে প্রথম চলক বসালে রাশিটি যদি পরিবর্তিত না হয়, তবে রাশিটিকে ঐ তিন চলকের উল্লিখিত ক্রমে একটি চক্র-ক্রমিক রাশি বা চক্র প্রতিসম রাশি (cyclic বা cyclically symmetric expression) বলা হয়। চলকগুলোর স্থান পরিবর্তন পাশের চিত্রের মত চক্রাকারে করা হয় বলেই এরূপ রাশিকে চক্র-ক্রমিক বলা হয়ে থাকে।

$x^2 + y^2 + xy + yz + zx$ রাশিটি x, y, z চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি, কারণ এতে চক্রাকারে x এর পরিবর্তে y, y এর পরিবর্তে z এবং z এর পরিবর্তে x বসালে রাশিটি একই থাকে। একইভাবে $x^2y + y^2z + z^2x$ রাশিটি x, y, z চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

$x^2 - y^2 + z^2$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি নয়, কারণ এতে x স্থলে y, y স্থলে z এবং z স্থলে x বসালে রাশিটি $y^2 - z^2 + x^2$ রাশিতে পরিবর্তিত হয় যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।

তিনটি চলকের প্রত্যেক প্রতিসম রাশি চক্র-ক্রমিক। কিন্তু প্রত্যেক চক্র-ক্রমিক রাশি প্রতিসম নয়।

যেমন, $x^2 (y - z) + y^2 (z - x) + z\ (x - y)$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক, কিন্তু প্রতিসম নয়। কারণ রাশিটিতে x এবং y এর স্থান বিনিময় করলে $y^2(x - z) + x^2 (z - y) + z^2(y - x)$ রাশি পাওয়া যায় যা পূর্বের রাশিটি থেকে ভিন্ন।

দ্রষ্টব্য। বর্ণনার সুবিধার্থে x, y চলকের রাশিকে F(x, y) আকারের এবং x, y, z চলকের রাশিকে F(x, y, z) আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

F(x, y, z) রাশিতে x ও y এর স্থান পরিবর্তন করলে যে রাশিটি পাওয়া যায় তা হল, F(x, y, z)।

যেমন, $F(y, x, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ হলে x ও y এর স্থান পরিবর্তন করে পাই,

$F(x, y, z) = \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y}$ এবং y ও z এর স্থান পরিবর্তন করে পাই,

$F(x, z, y) = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}$

এ থেকে দেখা যায়, F(x, y, z) রাশিটি প্রতিসম নয়। F(x, y, z) রাশির প্রতিসম হওয়ার শর্ত হল F(x, y, z) = F(y, x, z) = F(x, z, y) = F (z, y, x).

F(x, y, z) রাশিতে x, y, z এর চক্রাকার পরিবর্তন (x স্থলে y, y স্থলে z, z স্থলে x) করা হলে পরিবর্তিত রাশিটি হল F (y, z, x).

F(x, y, z) রাশির চলকগুলোর উল্লিখিত ক্রমে চক্র-ক্রমিক হওয়ার শর্ত হল :

F(x, y, z) = F(y, z, x).

উল্লেখ্য যে, F(x, y, z) চলকগুলোর উল্লিখিত ক্রমে চক্র-ক্রমিক হলে,

F(x, y, z) = F(y, z, x) = F(z, x, y)

উদাহরণ ১। দেখাও যে, $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ রাশিটি x, y, z চলকের উল্লিখিত ক্রমে একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

সমাধান : মনে করি, $F(x, y, z) = \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ তাহলে, x স্থলে y, y স্থলে z, z স্থলে x লিখে পাই,

$F(y, z, x) = \frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y} = F(x, y, z)$ $\therefore$ F(x, y, z) চক্র-ক্রমিক।

চক্র-ক্রমিক বহুপদীর উৎপাদকে বিশ্লেষণ

এরূপ বহুপদীকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার কোন ধরা-বাঁধা নিয়ম নেই। সাধারণত রাশিটির পদগুলোকে পুনর্বিন্যাস করে উৎপাদক বের করা হয়। অনেক সময় রাশিটিকে কোন একটি চলকের বহুপদী ধরে উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে এক বা একাধিক উৎপাদক নির্ণয় করা হয় এবং রাশিটির চক্র-ক্রমিক ও সমমাত্রিক বৈশিষ্ট্য বিবেচনা করে অপরাপর উৎপাদক নির্ণয় করা হয়।

এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে, a, b, c চলকের

(ক) কোনো চক্র-ক্রমিক বহুপদীর $(a-b)$ একটি উৎপাদক হলে, $(b-c)$ এবং $(c-a)$ রাশিটির উৎপাদক হবে।

(খ) এক মাত্রার ও দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী যথাক্রমে

$k(a+b+c)$ ও $k(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)$, যেখানে k ও m ধ্রুবক।

(গ) দুইটি বহুপদী যদি এমন হয় যে চলকগুলোর সকল মানের জন্য তাদের মান সমান হয়, তবে বহুপদী দুইটির অনুরূপ পদ দুইটির সহগ সমান হবে।

উদাহরণ ২। $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : প্রথম পদ্ধতি

$$\begin{aligned}
& bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b) \\
&= b^2c-bc^2+c^2a-ca^2+ab(a-b) \\
&= c^2a-bc^2-ca^2+b^2c+ab(a-b) \\
&= c^2(a-b)-c(a^2-b^2)+ab(a-b) \\
&= (a-b)\{c^2-c(a+b)+ab)\} \\
&= (a-b)\{c^2-ca-bc+ab)\} \\
&= (a-b)\{c(c-a)-b(c-a) \\
&= (a-b)(c-a)(c-b) \\
&= -(a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি

প্রদত্ত রাশিটিকে a এর বহুপদী P(a) ধরে তাতে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে দেখি যে,

$P(b) = bc(b-c)+cb(c-b)+b^2(b-b) = 0$

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। এখন যেহেতু প্রদত্ত রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি সেহেতু $(b-c)$ এবং $(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। প্রদত্ত রাশিটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক এবং এর তিনটি এক মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং অন্য উৎপাদক যদি থাকে তবে তা ধ্রুবক হবে। অর্থাৎ,

$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b) = k(a-b)(b-c)(c-a)$ .... (1) যেখানে k একটি ধ্রুবক।

a, b, c এর সকল মানের জন্য (1) সত্য। (1) এ $a = 0, b = 1, c = 2$ বসিয়ে পাই,

$2(-1) = k(-1)(-1)2$ বা, $k = -1$.

$\therefore bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$.

উদাহরণ ৩। $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : প্রদত্ত রাশিটিকে a এর বহুপদী P(a) বিবেচনা করে তাতে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে পাই,

$P(b) = b^3(b-c) + b^3(c-b) + c^3(b-b) = 0$.

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী (a – b) প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। এখন যেহেতু প্রদত্ত রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি সেহেতু (b – c) এবং (c – a) উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। আবার প্রদত্ত রাশিটি চার মাত্রার সমমাত্রিক রাশি এবং (a – b) (b – c) (c – a) তিন মাত্রার সমমাত্রিক রাশি। সুতরাং প্রদত্ত রাশির অপর উৎপাদকটি অবশ্যই চক্র-ক্রমিক এবং এক মাত্রার সমমাত্রিক রাশি হবে। অর্থাৎ, তা

$k(a+b+c)$ হবে, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

$\therefore a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$..................(1)

a, b, c এর সকল মানের জন্য (1) সত্য (1) এ $a = 0, b = 1, c = 2$ বসিয়ে পাই,

$2 + 8(-1) = k(-1)(-1)(2)(3)$ বা, $k = -1$

(1) এ $k = -1$ বসিয়ে পাই,

$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

উদাহরণ ৪। $(b+c)(c+a)(a+b) + abc$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সামাধান : রাশিটিকে a এর বহুপদী P(a) বিবেচনা করে তাতে a এর পরিবর্তে –b –c বসিয়ে পাই,

$P\{-(b+c)\} = (b+c)(c-b-c)(-b-c+b) + (-b-c)bc$

$= bc(b+c) - bc(b+c) = 0$

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী (a + b + c) প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। প্রদত্ত রাশিটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী এবং এর এক মাত্রার একটি উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং অপর উৎপাদক দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী হবে অর্থাৎ, $k(a^2 + b^2 + c^2) + m(bc + ca + ab)$ আকারের হবে যেখানে k ও m ধ্রুবক।

$\therefore (b+c)(c+a)(a+b) + abc$

$= (a+b+c)\{k(a^2 + b^2 + c^2) + m(bc + ca + ab)\}$ ....(1)

a, b, c এর সকল মানের জন্য (1) সত্য। (1) এ প্রথমে, $a = 0, b = 0, c = 1$

এবং পরে $a = 1, b = 1, c = 0$ বসিয়ে যথাক্রমে পাই,

$0 = k$ এবং $2 = 2(k \times 2 + m)$ $\therefore k = 0, m = 1$.

(1) এ k ও m এর মান বসিয়ে পাই,

$(b+c)(c+a)(a+b) + abc = (a+b+c)(bc + ca + ab)$.

মন্তব্য। উদাহরণ ২ এর সমাধানের প্রথম পদ্ধতির অনুরূপ পদ্ধতিতে উদাহরণ ৩ এবং উদাহরণ ৪ এ বর্ণিত রাশি দুইটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাবে।

একটি বিশেষ বীজগাণিতিক সূত্র ঃ a, b ও c এর সকল মানের জন্য

নিম্নে সূত্রটির দুইটি প্রমাণ দেওয়া হল :

প্রথম প্রমাণ (সরাসরি সহজ বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে) :

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$= (a + b)^3 - 3ab\,(a + b) + c^3 - 3abc$
$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab\,(a + b + c)$
$= (a + b + c)\,\{(a + b)^2 - (a + b)\,c + c^2\} - 3ab\,(a + b + c)$
$= (a + b + c)\,(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$
$= (a + b + c)\,(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$
$= (a + b + c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

দ্বিতীয় প্রমাণ (সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদীর ধারণা ব্যবহার করে) :

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ রাশিটিকে a চলকের বহুপদী $P(a)$ ধরে তাতে $a = -(b + c)$ বসিয়ে পাই,

$P\{-(b + c)\} = -(b + c)^3 + b^3 + c^3 + 3(b + c)\,bc = -(b + c)^3 + (b + c)^3 = 0.$

সুতরাং $a + b + c$ বিবেচনাধীন রাশিটির একটি উৎপাদক। যেহেতু $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী, সুতরাং রাশিটির অপর উৎপাদক $k(a^2 + b^2 + c^2) + m(ab + bc + ca)$ আকারের হবে, যেখানে k ও m ধ্রুবক। অতএব, সকল a, b, c এর জন্য

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\,\{k(a^2 + b^2 + c^2) + m\,(ab + bc + ca)\}.$

এখানে প্রথমে $a = 1, b = 0, c = 0$ এবং পরে $a = 1, b = 1, c = 0$ বসিয়ে যথাক্রমে পাই,

$1 = k$ এবং $2 = 2(k \times 2 + m)$

বা, $k = 1$ এবং $1 = 2 + m \quad \therefore k = 1$ এবং $m = -1.$

$\therefore\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

অনুসিদ্ধান্ত ১।

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\,\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$$

প্রমাণ : যেহেতু $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$$= \frac{1}{2}\,(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$
$$= \frac{1}{2}\,\{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\,\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$$

$\therefore\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$= (a + b + c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$
$$= \frac{1}{2}\,(a + b + c)\,\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$$

অনুসিদ্ধান্ত ২। যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$

অনুসিদ্ধান্ত ৩। যদি $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ হয়, তবে $a + b + c = 0$ অথবা $a = b = c.$

উদাহরণ ৫। $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : ধরি, $A=a-b$, $B=b-c$ এবং $C=c-a$. তাহলে,

$A+B+C=a-b+b-c+c-a=0$

সুতরাং $A^3+B^3+C^3=3ABC$

অর্থাৎ, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

অনুশীলনী - ২.২

১। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(ক) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$.

(খ) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

(গ) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$.

(ঘ) $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)$.

(ঙ) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.

(চ) $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$.

(ছ) $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.

(জ) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

(ঝ) $x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)+3xyz$.

(ঞ) $yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)+3xyz$.

(ট) $(x+1)^2(y-z)+(y+1)^2(z-x)+(z+1)^2(x-y)$.

(ঠ) $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2)$.

(ড) $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$.

(ঢ) $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3-1$.

(ণ) a^6+18a^3+125.

২। যদি $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}\neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে,

$(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$.

৩। যদি $(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$ হয়, তবে দেখাও যে, $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$.

৪। যদি $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$ হয়, তবে দেখাও যে, $bc+ca+ab=0$ অথবা $a=b=c$.

৫। যদি $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ এবং $z=a+b-c$ হয়, তবে দেখাও যে,

$x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

২.৪। মূলদ ভগ্নাংশ (Rational Fractions).

একটি বহুপদীকে হর এবং একটি বহুপদীকে লব নিয়ে গঠিত ভগ্নাংশকে মূলদ ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন,

$\frac{x}{(x-a)(x-b)}$ এবং $\frac{a^2+a+1}{(a-b)(a-c)}$ মূলদ ভগ্নাংশ।

উদাহরণ ১। সরল কর ঃ $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= \frac{a}{-(a-b)(c-a)} + \frac{b}{-(b-c)(a-b)} + \frac{c}{-(c-a)(b-c)}$

$= \frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{-(b-c)(c-a)(a-b)}$

$= \frac{0}{-(b-c)(c-a)(a-b)}$ [$\therefore a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)$

$= 0$ $= ab - ac + bc - ba + ca - bc$

$= 0$]

উদাহরণ ২। সরল কর : $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{a^2}{(c-a)(c-b)}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= \frac{a^2}{-(a-b)(c-a)} + \frac{b^2}{-(b-c)(a-b)} + \frac{a^2}{-(c-a)(b-c)}$

$= \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

কিন্তু $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$ (পূর্ব অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য)

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)} = 1$

উদাহরণ ৩। সরল কর : $\frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2} + \frac{b^2-(a-c)^2}{(a+b)^2-c^2} + \frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$

সমাধান : প্রথম ভগ্নাংশ $= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+c+b)(a+c-b)} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$

দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $= \frac{(b+c-a)(b-a+c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{b-a+c}{a+b+c}$

তৃতীয় ভগ্নাংশ $= \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{(b+c+a)(b+c-a)} = \frac{c+a-b}{a+b+c}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{a+b-c}{a+b+c} + \frac{b-a+c}{a+b+c} + \frac{c+a-b}{a+b+c}$

$= \frac{a+b-c+b-a+c+c+a-b}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$

উদাহরণ ৪ । সরল কর : $\frac{a^2+(b-c)^2}{(a-b)(c-a)}+\frac{b^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^2+(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $\frac{\{a^2+(b-c)^2\}(b-c)+\{b^2+(c-a)^2\}(c-a)+\{c^2+(a-b)^2\}(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{a^2(b-c)+(b-c)^3+b^2(c-a)+(c-a)^3+c^2(a-b)+(a-b)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{a^2(b-c)+(b-c)^3+b^2(c-a)+(c-a)^3+c^2(a-b)+(a-b)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ .... (1)

কিন্তু $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

এবং $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$ (পূর্ব অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য)

$\therefore$ (1) এর লব $= a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)+3(a-b)(b-c)(c-a)$

$= 2(a-b)(b-c)(c-a)$

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $= \frac{2(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=2.$

উদাহরণ ৫ । সরল কর : $\frac{(ax+1)^2}{(x-y)(z-x)}+\frac{(ay+1)^2}{(x-y)(y-z)}+\frac{(az+1)^2}{(y-z)(z-x)}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি

$= \frac{(ax+1)^2(y-z)+(ay+1)^2(z-x)+(az+1)^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$ .... (1)

(1) এর লব $= (a^2x^2+2ax+1)(y-z)+(a^2y^2+2ay+1)(z-x)+(a^2z^2+2az+1)(x-y)$

$= a^2\{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\}+2a\{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\}+\{(y-z)+(z-x)+(x-y)\}$

কিন্তু $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)$ (পূর্ব অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য)

তদুপরি, $x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)=0$ এবং $(y-z)+(z-x)+(x-y)=0$

$\therefore$ (1) এর লব $= -a^2(x-y)(y-z)(z-x)+2a\times 0+0$

$= -a^2(x-y)(y-z)(z-x)$

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $= \frac{-a^2(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=-a^2.$

উদাহরণ ৬। সরল কর : $\frac{1}{x+a} + \frac{2x}{x^2+a^2} + \frac{4x^3}{x^4+a^4} + \frac{4x^7}{a^8-x^8}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশির তৃতীয় ও চতুর্থ পদের যোগফল

$$\frac{4x^3}{x^4+a^4}+\frac{8x^7}{a^8-x^8}=\frac{4x^3}{x^4+a^4}\left(1+\frac{2x^4}{a^4-x^4}\right)$$

$$=\frac{4x^3}{x^4+a^4} \times \frac{a^4-x^4+2x^4}{a^4-x^4}=\frac{4x^3}{x^4+a^4} \times \frac{a^4+x^4}{a^4-x^4}=\frac{4x^3}{x^4-a^4}$$

$\therefore$ দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পদের যোগফল

$$=\frac{2x}{x^2+a^2}+\frac{4x^3}{a^4-x^4}=\frac{2x}{x^2+a^2}\left(1+\frac{2x^2}{a^2+x^2}\right)=\frac{2x}{x^2+a^2} \times \frac{a^2-x^2+2x^2}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{2x}{x^2+a^2} \times \frac{x^2+a^2}{a^2-x^2}=\frac{2x}{a^2-x^2}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{x+a}+\frac{2x}{a^2+x^2}=\frac{a-x+2x}{a^2-x^2}=\frac{a+x}{a^2-x^2}=\frac{1}{a-x}$.

আংশিক ভগ্নাংশ

$\frac{3x-8}{x^2-5x+6}$ ভগ্নাংশটিকে এভাবে লেখা যায়

$$\frac{3x-8}{x^2-5x+6}=\frac{2(x-3)+(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

এখানে প্রদত্ত ভগ্নাংশটিকে দুইটি ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা হয়েছে। অর্থাৎ, ভগ্নাংশটিকে দুইটি আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করা হয়েছে।

যদি কোনো ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা হয়, তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ (Partial fraction) বলা হয়।

আমরা এখন $\frac{N(x)}{D(x)}$ আকারের কতিপয় সহজ ভগ্নাংশকে কীভাবে আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করা হয় তা নিয়ে আলোচনা করব, যেখানে $N(x)$ ও $D(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী। $\frac{N(x)}{D(x)}$ আকারের মূলদ ভগ্নাংশকে প্রকৃত ভগ্নাংশ (proper fraction) বলা হয় যদি লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা ছোট হয়। লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রার সমান অথবা তা অপেক্ষা বড় হলে ভগ্নাংশটিকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ (Improper fraction) বলা হয়।

যেমন, $\frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)(x-3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং $\frac{2x^2}{(x+1)(x+2)}$ ও $\frac{3x^2}{(x+1)(x+2)}$ উভয়ই অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

উল্লেখ্য যে, অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লবকে হর দ্বারা সাধারণ নিয়মে ভাগ করে অথবা লবের পদগুলোকে সুবিধাজনক ভাবে পুনর্বিন্যাস করে ভগ্নাংশটিকে একটি বহুপদী (ভাগফল) এবং একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের

যোগফল রূপে প্রকাশ করা যায়। যেমন, $\frac{x^2+5x+8}{x+3} = (x+2) + \frac{2}{x+3}$.

প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশকে কীভাবে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করা হয় তা নিম্নের উদাহরণগুলোতে দেখান হল।

উদাহরণ ৭। $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : ধরি, $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ .... (1)

(1) এর উভয়পক্ষকে (x – 1) (x – 2) দ্বারা গুণ করলে পাই,

$5x - 7 = A(x-2) + B(x-1)$ .... (2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য। এখন (2) এর উভয় পক্ষে x = 1 বসিয়ে পাই,

$5 - 7 = A(1-2) + B(1-1)$ বা, $-2 = -A \therefore A = 2$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে x = 2 বসিয়ে পাই,

$10 - 7 = A(2-2) + B(2-1)$ বা, $3 = B \therefore B = 3$

এখন A এবং B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

এতেই প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত হল।

মন্তব্য : প্রদত্ত ভগ্নাংশটির আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ যে যথাযথ হয়েছে তা পরীক্ষা করে দেখা যেতে পারে :

ডানপক্ষ = $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} = \frac{2(x-2)+3(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$ = বামপক্ষ।

উদাহরণ ৮। $\frac{x+8}{(x-2)(x+3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : ধরি, $\frac{x+8}{(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$ .... (1)

(1) এর উভয়পক্ষকে (x – 2) (x + 3) দ্বারা গুণ করলে পাই,

$x + 8 = A(x+3) + B(x-2)$ .... (2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য হয়। এখন (2) এর উভয়পক্ষে x = 2 বসিয়ে পাই,

$10 = 5A + 0$, বা $A = 2$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই, $5 = 0 + B(-5)$ বা, $B = -1$.

এখন A এবং B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই, $\frac{x+8}{(x-2)(x+3)} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+3}$

প্রদত্ত ভগ্নাংশটি এতেই আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত হল।

মন্তব্য। আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ যে যথাযথ হয়েছে তা পরীক্ষা করে দেখা যেতে পারে :

ডানপক্ষ = $\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+3} = \frac{2(x+3)-(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+8}{(x-2)(x+3)}$ = ডানপক্ষ

উদাহরণ ৯। $\frac{12x+11}{x^2+x-6}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত কর।

সমাধান : এখানে $x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6 = (x-2)(x+3)$

সুতরাং, $\frac{12x+11}{x^2+x-6} = \frac{12x+11}{(x-2)(x+3)}$

ধরি, $\frac{12x+11}{(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x-2} - \frac{B}{x+3}$ .... (1)

উভয়পক্ষকে $(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$12x+11 \equiv A(x+3)+B(x-2)$ .... (2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(2) এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই, $24+11 = 5A$ বা $35 = 5A$, বা $A = 7$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই, $-36+11 = B(-3-2)$ বা, $-25 = -5B$ বা, $B = 5$

এখন A এবং B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{12x+11}{(x-2)(x+3)} = \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x+3}$$

বা, $$\frac{12x+11}{(x^2+x-6)} = \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x+3}$$

প্রদত্ত ভগ্নাংশটি এতেই আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত হল।

মন্তব্য। আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ যে যথাযথ হয়েছে তা পরীক্ষা করে দেখা যেতে পারে :

ডানপক্ষ = $\frac{7}{x-2} + \frac{5}{x+3} = \frac{7(x+3)+5(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{7x+21+5x-10}{(x-2)(x+3)}$

$= \frac{12x+11}{(x^2+x-6)}$ = বামপক্ষ

উদাহরণ ১০। $\frac{(x+5)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : ধরি, $\frac{(x+5)}{(x-1)(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-3}$ ....(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-1)(x-2)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x+5 \equiv A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$ .... (2)

(2) এর উভয়পক্ষ x এর সকল মানের জন্য সত্য। (2) এর উভয়পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$1+5 = A(-1)(-2)$ বা, $6 = 2A$ বা, $A = 3$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$2 + 5 = B(1)(-1)$ বা, $7 = -B$ বা, $B = -7$

এবং (2) এর উভয়পক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$3 + 5 = C(2)(1)$ বা, $8 = 2C$ বা, $C = 4$

এখন, A, B এবং C এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$\frac{(x+5)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{4}{x-3}$ এটিই প্রদত্ত ভাগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ।

মন্তব্য : আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ যে যথাযথ হয়েছে তা পরীক্ষা করে দেখা যেতে পারে :

$$\text{ডানপক্ষ} = \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{4}{x-3} = \frac{3(x-2)(x-3) - 7(x-1)(x-3) + 4(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{3(x^2-5x+6) - 7(x^2-4x+3) + 4(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{(3-7+4)x^2 + (-15+28-12)x + (18-21+8)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \text{বামপক্ষ।}$$

দ্রষ্টব্য। উপরের উদাহরণগুলোতে ব্যাখ্যাত পদ্ধতিকে এভাবে বর্ণনা করা যায় :

যদি $\frac{N(x)}{D(x)}$ প্রকৃত ভগ্নাংশ হয় এবং $D(x)$ কে একঘাতিক ভিন্ন ভিন্ন উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়, তবে $D(x)$ এর প্রত্যেক একঘাতিক উৎপাদক $P(x)$ এর জন্য $\frac{A}{P(x)}$ আকারের একটি আংশিক ভগ্নাংশ ধরে

$$\frac{N(x)}{D(x)} \equiv \frac{A}{P(x)} + \frac{B}{Q(x)} + \frac{C}{R(x)} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

লেখা যায়, যেখানে A, B, C ..... হলো ধ্রুবক এবং $D(x) = P(x), Q(x), R(x)$ ..... । (1) এর উভয়পক্ষে $D(x)$ দ্বারা গুণ করে দুইটি বহুপদীর অভেদ পাওয়া যায় যা x এর সকল মানের জন্য সত্য হয়। এই অভেদ থেকে x এর সুবিধাজনক মান বসিয়ে A, B, C ইত্যাদি নির্ণয় করা যায়। এভাবে প্রদত্ত ভগ্নাশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হয়।

উল্লেখ্য যে, এই পদ্ধতি শুধু তখনই বৈধ হয় যখন ভগ্নাংশটি প্রকৃত ভগ্নাংশ হয় এবং $D(x)$ এর উৎপাদকগুলো একঘাতিক ও ভিন্ন ভিন্ন হয়।

যদি $\frac{N(x)}{D(x)}$ অপ্রকৃত ভগ্নাংশ হয় এবং $D(x)$ কে একঘাতিক ভিন্ন ভিন্ন উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় তবে $\frac{N(x)}{D(x)}$ কে প্রথমে প্রকৃত ভগ্নাংশে রূপান্তরিত করে আগের মত অগ্রসর হতে হয়।

উদাহরণ ১১। $\frac{x^3}{x^2-9}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : প্রদত্ত মূলদ ভগ্নাংশটি একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

এখানে, $\frac{x^3}{x^2-9} = \frac{x(x^2-9)+9x}{x^2-9} = x + \frac{9x}{x^2-9}$

অর্থাৎ, $\frac{x^3}{x^2-9} = x + \frac{9x}{(x-3)(x+3)}$ .... (1)

এখন, $\frac{9x}{(x-3)(x+3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\frac{9x}{(x-3)(x+3)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$ .... (2)

উভয়পক্ষকে $(x-3)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$9x = A(x+3) + B(x-3)$ .... (3)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য। (3) এর উভয়পক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই, $27 = A \times 6$ বা, $A = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

আবার, (3) এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই, $-27 = B \times (-6)$ বা, $B = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$.

(2) এ A ও B এর মান বসিয়ে পাই, $\frac{9x}{(x-3)(x+3)} = \frac{\frac{9}{2}}{x-3} + \frac{\frac{9}{2}}{x+3}$

(1) থেকে পাই, $\frac{x^3}{x^2-9} = x + \frac{\frac{9}{2}}{x-3} + \frac{\frac{9}{2}}{x+3} = x + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3}\right)$

মন্তব্য : দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগফলকে সরলীকরণের সময় যোগফলের লব প্রায়শই চক্র-ক্রমিক রাশি হয়। তখন লবকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে যোগফলকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করতে হয়। এ ধরনের ক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট যে কোনো পরিচিত উৎপাদকীকরণ সূত্র বিনা প্রমাণে ব্যবহার করা যাবে।

যেমন :

১। $bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b) = -(b-c)(c-a)(a-b)$

২। $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = -(b-c)(c-a)(a-b)$

৩। $a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2) = (b-c)(c-a)(a-b)$

৪। $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = -(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$

৫। $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2)=-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$

৬। $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc=(a+b)(b+c)(c+a)$

৭। $(b+c)(c+a)(a+b)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

৮। $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

অনুশীলনী ২.৩

সরল কর :

১। $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$

২। $\dfrac{a^3-1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3-1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3-1}{(c-a)(c-b)}$

৩। $\dfrac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(b+d)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$

৪। $\dfrac{a^3+a^2+1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3+b^2+1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3+c^2+1}{(c-a)(c-b)}$

৫। $\dfrac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2+ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}$

৬। $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

৭। $\dfrac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(a-c)}+\dfrac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(b-a)}+\dfrac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(c-b)}$

৮। $\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}+\dfrac{16}{x^{16}-1}$

আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

৯। $\dfrac{5x+4}{x(x+2)}$ ১০। $\dfrac{x+2}{(x^2-7x+12)}$ ১১। $\dfrac{5x+2}{(x+2)(3x-2)}$

১২। $\dfrac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)}$ ১৩। $\dfrac{8x+46}{(x-3)(x+2))(x+4)}$ ১৪। $\dfrac{x^3+2x^2+1}{(x^2+2x-3)}$

বহুনির্বাচনী ও সৃজনশীল প্রশ্নাবলী

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। নিচের কোন রাশিটি প্রতিসম ?

ক. $a + b + c$

খ. $xy + yz - zx$

গ. $x^2 - y^2 + z^2$

ঘ. $2a^2 - 5bc - c^2$

২। i. যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

ii. $F(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

iii. $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^4-1}$ এর সরল মান $\frac{1}{x-1}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii

খ. ii ও iii

গ. i ও iii

ঘ. i, ii ও iii

বহুপদী $x^3 + px^2 - x - 7$ এর একটি উৎপাদক $x + 7$.
এই তথ্যের আলোকে নিচের ৩ এবং ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৩। P এর মান কত ?

ক. -7

খ. 7

গ. $\frac{51}{7}$

ঘ. $\frac{47}{7}$

৪। বহুপদীটির অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল কত ?

ক. $(x-1)(x-1)$

খ. $(x+1)(x-2)$

গ. $(x-1)(x+3)$

ঘ. $(x+1)(x-1)$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। চলক x এর একটি বহুপদী $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$

ক. বহুপদীর আদর্শ রূপটি লিখ এবং একটি তৃতীয় মাত্রার উলট বহুপদীর উদাহরণ দাও।

খ. P(x) বহুপদীটির একটি উৎপাদক (x + 2) হলে a এর মান নির্ণয় কর।

গ. যদি $Q(x) = 6x^3 - x^2 + 9x + 2$ এর ক্ষেত্রে $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ হয়, তবে P(x) এবং Q(x) এর সাধারণ উৎপাদক দুইটি নির্ণয় কর।

২। x, y, z এর একটি বহুপদী হল–

$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

ক. দেখাও যে, F (x, y, z) হল একটি চক্র ক্রমিক রাশি।

খ. F(x, y, z) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি F(x, y, z) = 0 , $(x + y + z) \neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $(x^2 + y^2 + z^2) = (xy + yz + zx)$

গ. যদি x = (b + c – a), y = (c + a – b) এবং z = (a + b – c) হয়, তবে দেখাও যে, F(a, b, c) ঃ F (x, y, z) = 1 ঃ 4

৩। চলক x এর চারটি রাশি হল $(x + 3), (x^2 - 9), (x^3 + 27)$ এবং $(x^4 - 81)$

ক. উপরিউক্ত রাশিগুলোর হতে একটি প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ এবং একটি অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ তৈরি কর।

খ. $\frac{(x^3+27)}{(x^2-9)}$ কে সম্ভাব্য আংশিক ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে উপস্থাপন কর।

গ. উপরের প্রথম, দ্বিতীয় এবং চতুর্থ রাশিসমূহের প্রত্যেকের গুণাত্মক বিপরীত রাশির সমষ্টিকে সরলরূপে প্রকাশ কর।

তৃতীয় অধ্যায়

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি

৩.১। স্বাভাবিক সংখ্যা সেট

গণনাকারী সংখ্যা হিসেবে প্রথমেই যে সংখ্যাগুলোর সঙ্গে আমরা পরিচিত হই সেগুলো হল স্বাভাবিক সংখ্যা (natural number) 1, 2, 3, 4, 5 ইত্যাদি। অতঃপর বিভিন্ন প্রয়োজনে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ ইত্যাদি প্রক্রিয়ার মাধ্যমে সম্প্রসারণ ঘটিয়ে বাস্তব সংখ্যা ব্যবস্থা গড়ে তোলা হয়েছে।

সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে N দ্বারা সূচিত করা হয়। স্বাভাবিক সংখ্যা 1 থেকে শুরু করে, 1 এর অনুগামী স্বাভাবিক সংখ্যা 2, 2 এর অনুগামী স্বাভাবিক সংখ্যা 3, 3 এর অনুগামী স্বাভাবিক সংখ্যা 4, ... এভাবে স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো কল্পনা করা হয়। N সেটে যোগ প্রক্রিয়া বিবেচনা করে $2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1,$ .... বর্ণনা করা যায়। এভাবে 1 থেকে শুরু করে $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ সেটটি গঠন করা হয়। N সেটে যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ার ধারণা ব্যবহার করে এই সেটের মৌলিক বৈশিষ্ট্যসমূহ নিম্নোক্তভাবে বর্ণনা করা যায়।

N এর মৌলিক স্বীকার্যসমূহ

(ক) যদি $m, n \in N$ হয়, তবে এমন অনন্য $s \in N$ এবং অনন্য $p \in N$ আছে, যেন $s = m + n$ (m যোগ n) এবং $p = mn$ (m গুণ n) হয়। অর্থাৎ, দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল ও গুণফল স্বাভাবিক সংখ্যা। অর্থাৎ, যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ায় N আবদ্ধ।

(খ) যদি $m, n \in N$ হয়, তবে $m + n = n + m$ এবং $mn = nm$. অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যার মধ্যে যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ায় বিনিময় নিয়ম প্রযোজ্য।

(গ) যদি $k, m, n \in N$ হয়, তবে $(k + m) + n = k + (m + n)$ এবং $(km)n = k(mn)$. অর্থাৎ, স্বাভাবিক সংখ্যার মধ্যে যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ায় সহযোজন নিয়ম প্রাযোজ্য।

(ঘ) যদি $k, m, n \in N$ হয়, তবে $k(m + n) = km + kn$. অর্থাৎ, স্বাভাবিক সংখ্যার গুণ যোগের উপর বণ্টনযোগ্য।

(ঙ) $1 \in N$ এবং যদি $n \in N$ হয়, তবে $n. 1 = n$.

অর্থাৎ, এমন একটি স্বাভাবিক সংখ্যা 1 রয়েছে যা গুণ প্রক্রিয়ার অভেদক।

(চ) যদি $m, n \in N$ হয়, তবে নিম্নোক্ত উক্তি তিনটির একটি ও কেবল একটি সত্য ঃ

(১) এমন $x \in N$ আছে, যেন $m + x = n$ হয়;

(২) $m = n$;

(৩) এমন $y \in N$ আছে, যেন $m = n + y$ হয়।

মন্তব্য : (চ) থেকে স্বাভাবিক সংখ্যার মধ্যে বড়-ছোট এবং স্বাভাবিক সংখ্যার বিয়োগফল বর্ণনা করা যায়। যদি $m, n \in N$ এবং $m \neq n$ হয়, তবে (চ) অনুযায়ী,

(১) $m + x = n$ হলে, $n > m$ বা, $m < n$ ধরা হয় ও $x = n - m$ লেখা হয়,

(২) $m = n + y$ হলে, $m > n$ বা, $n < m$ ধরা হয় ও $y = m - n$ লেখা হয়।

(ছ) যদি $S \subset N$ এমন হয় যে,

(১) $1 \in S$,

(২) $n \in S$ হলে সর্বদা $n + 1 \in S$ হয়, তবে $S = N$.

এই স্বীকার্যকে গাণিতিক আরোহ বিধি (Principle of mathematical induction) বলা হয়।

উদাহরণ ১। দেখাও যে, যদি $m, n, k \in N$ এবং $k + m = k + n$ হয়, তবে $m = n$.

সমাধান : $m = n$ না হলে হয় $m + p = n$ যেখানে $p \in N$ অথবা $m = n + q$ যেখানে $q \in N$

প্রথমে মনে করি, $m + p = n$ যেখানে $p \in N$। তাহলে,

$k + n = k + (m + p)$ [প্রতিস্থাপন]

$= (k + m) + p$ [সহযোজন]

$= (k + n) + p$ [প্রতিস্থাপন]

যা স্বীকার্য অনুযায়ী সম্ভব নয়, কেননা $k + m = k + n$.

সুতরাং $m + p \neq n$ যেখানে $p \in N$.

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $m \neq n + q$ যেখানে $q \in N$.

সুতরাং স্বীকার্য অনুযায়ী $m = n$.

উদাহরণ ২। যদি $k, m, n \in N$ এবং $k < m$ ও $m < n$ হয়, তবে দেখাও যে, $k < n$ হবে।

সমাধান : $k < m$ এবং $m < n$ [কল্পনা]

$\therefore$ $m = k + p$ এবং $n = m + q$ যেখানে $p, q \in N$ [সংজ্ঞা]

$\therefore$ $n = (k + p) + q$ [প্রতিস্থাপন]

$= k + (p + q)$ [সহযোজন] $\therefore$ $k < n$ [সংজ্ঞা]

উদাহরণ ৩। যদি $S = \{n : n \in N$ এবং 2 দ্বারা $n(n + 1)$ বিভাজ্য$\}$ হয়, তবে দেখাও যে, $S = N$.

সমাধান : $1 \in S$, কেননা $1(1 + 1) = 2$ যা 2 দ্বারা বিভাজ্য।

ধরা যাক, $m \in S$, তাহলে 2 দ্বারা $m(m + 1)$ বিভাজ্য। অর্থাৎ, $m(m + 1) = 2k$, যেখানে $k \in N$.

এখন $(m + 1)\{(m + 1) + 1\} = (m + 1)(m + 2)$

$= m(m + 1) + 2(m + 1) = 2k + 2(m + 1)$

$= 2\{k + (m + 1)\}$

$\therefore$ 2 দ্বারা $(m + 1)\{(m + 1) + 1\}$ বিভাজ্য। $\therefore$ $m + 1 \in S$.

সুতরাং গাণিতিক আরোহ বিধি অনুযায়ী $S = N$

৩.২। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি

পূর্ব অনুচ্ছেদের উদাহরণ ৩ এ বর্ণিত S সেটটি "2 দ্বারা $n(n + 1)$ বিভাজ্য"

খোলা বাক্যের সমাধান সেট, যেখানে n চলকের ডোমেন বা ব্যাপ্তি সেট N. এরূপ খোলা বাক্যকে $P(n)$ দ্বারা সূচিত করে n স্থলে স্বাভাবিক সংখ্যা 1, 2 ইত্যাদি প্রতিস্থাপন করে $P(1)$, $P(2)$ ইত্যাদি গাণিতিক উক্তি পাওয়া যায়। যেমন, উপরে উল্লিখিত খোলা বাক্যটিকে $P(n)$ ধরে আমরা পাই,

$P(n)$ ঃ "2 দ্বারা $n(n+1)$ বিভাজ্য" এতে n স্থলে 1, 2 ইত্যাদি বসিয়ে প্রাপ্ত উক্তিগুলো হল,

$P(1)$ ঃ "2 দ্বারা $1(1+1)$ বিভাজ্য"

$P(2)$ ঃ "2 দ্বারা $2(2+1)$ বিভাজ্য" ইত্যাদি।

উল্লিখিত উদাহরণটিতে দেখা যায় যে, $P(n)$ খোলা বাক্যের সমাধান সেট $S = N$. এ থেকে বলা যায় যে, সকল $n \in N$ এর জন্য $P(n)$" প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণিত হল। সমাধানটি পর্যালোচনা করলে দেখা যাবে যে, এজন্য নিম্নোক্ত দুইটি ধাপ প্রমাণ করাই যথেষ্ট।

প্রমাণ ধাপ : $P(1)$ সত্য।

দ্বিতীয় ধাপ : $P(m)$ সত্য হলে $P(m+1)$ সত্য, যেখানে $m \in N$.

গাণিতিক আরোহ বিধি এরূপ প্রমাণের ভিত্তি বলে একে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির প্রমাণ বলা হয়। উপরের আলোচনা থেকে দেখা যায় যে,

প্রতিজ্ঞা (গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি) :

স্বাভাবিক সংখ্যা চলক n সম্বলিত কোনো খোলা বাক্য সকল $n \in N$ এর জন্য সত্য হবে যদি

(১) বাক্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য হয় এবং (২) বাক্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য হলে তা $n = m + 1$ এর জন্যও সত্য হয়, যেখানে $m \in N$.

উদাহরণ ১। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে, $1 + 3 + 5 + \dots\dots\dots + (2n-1) = n^2$, যেখানে n যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যা।

প্রমাণ : (প্রথম ধাপ) ঃ এখানে $1 + 3 + 5 + \dots\dots\dots + (2n-1) = n^2$ .... (1)

$n = 1$ হলে, (1) এর বামপক্ষ $= 1$ এবং ডানপক্ষ $= 1^2 = 1$

$\therefore$ $n = 1$ এর জন্য (1) বাক্যটি সত্য।

(দ্বিতীয় ধাপ) : ধরি, $n = m$ এর জন্য (1) বাক্যটি সত্য।

অর্থাৎ $1 + 3 + 5 + \dots\dots + (2m-1) = m^2$ .... (2)

এখন (1) বাক্যটি $n = m + 1$ এর জন্য সত্য হবে যদি

$1 + 3 + 5 + \dots\dots\dots + (2m+1) = (m+1)^2$ .... (3)

সত্য হয়।

এখন (2) এর উভয়পক্ষে $2m + 1$ যোগ করে পাই,

$$1 + 3 + 5 + \dots\dots\dots + (2m-1) + (2m+1) = m^2 + (2m+1) = (m+1)^2$$

এখন (1) এর উভয়পক্ষে $n = m + 1$ বসালে (1) এর বামপক্ষ এবং ডানপক্ষ যথাক্রমে (3) এর বামপক্ষ ও ডানপক্ষের সাথে মিলে যায়। সুতরাং সূত্রটি $n = m$ এর জন্য সত্য হলে তা $n = m + 1$ এর জন্যও সত্য।

$\therefore$ (3) সত্য, অর্থাৎ $n = m + 1$ এর জন্য (1) বাক্যটি সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সকল $n \in N$ এর জন্য (1) সত্য।

উদাহরণ ২। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে, সকল $n \in N$ এর জন্য

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

প্রমাণ : (প্রথম ধাপ) : এখানে, $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .... (1)

$n = 1$ এর জন্য (1) বাক্যটি সত্য, কারণ তখন বামপক্ষ $= 1$ এবং ডানপক্ষ $= \frac{1(1+1)}{2} = 1.$

(দ্বিতীয় ধাপ) : ধরি, $n = m$ এর জন্য (1) বাক্যটি সত্য, অর্থাৎ,

$1 + 2 + 3 + ... + m = \frac{m(m+1)}{2}$ .... (2)

এখন (1) বাক্যটি $n = m + 1$এর জন্যও সত্য হবে যদি

$1 + 2 + 3 + ... + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ ....(3)

সত্য হয়।

এখন (2) এর উভয়পক্ষে $(m+1)$ যোগ করে পাই,

$1 + 2 + 3 + ... + m + (m + 1)$

$= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{m(m+1)+2(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(m+2)}{2}$

$\therefore$ (3) প্রমাণিত হল, অর্থাৎ, $n = m + 1$ এর জন্য (1) বাক্যটি সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সকল $n \in N$ এর জন্য (1) উক্তিটি সত্য।

উদাহরণ ৩। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে, n যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা হলে, $x^{2n} - y^{2n}$ রাশিটি $(x + y)$ দ্বারা বিভাজ্য।

প্রমাণ : (প্রথম ধাপ) প্রতিজ্ঞাটি $n = 1$ এর জন্য সত্য। কারণ, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, যা $(x + y)$ দ্বারা বিভাজ্য ।

(দ্বিতীয় ধাপ) : ধরি, প্রতিজ্ঞাটি $n = m$ এর জন্য সত্য। অর্থাৎ, $x^{2m} - y^{2m}$ রাশিটি $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য ।

এখন প্রতিজ্ঞাটি $n = m + 1$ এর জন্য সত্য হবে যদি

$x^{2(m+1)} - y^{2(m+1)} = x^{2m+2} - y^{2m}$ রাশিটি $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য হয়।

এখন, $x^{2m+2} - y^{2m+2} = (x^{2m+2} - x^2y^{2m}) + (x^2y^{2m} - y^{2m+2})$

$= x^2(x^{2m} - y^{2m}) + y^{2m}(x^2 - y^2)$ .... (ক)

এখন (ক) এর ডানপক্ষের প্রথম ও দ্বিতীয় পদ $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং (ক) এর বামপক্ষ $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য। অর্থাৎ, প্রতিজ্ঞাটি $n = m + 1$ এর জন্য সত্য। সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী যে কোনো $n \in N$ এর জন্য প্রতিজ্ঞাটি সত্য।

উদাহরণ ৪। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে, সকল $n \in N$ এর জন্য

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+ .... +\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

প্রমাণ: এখানে, $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+ .... +\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ ....(1)

(প্রথম ধাপ) : $n = 1$ হলে (1) বাক্যটি সত্য। কারণ, তখন (1) এর বামপক্ষ $\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$

এবং ডানপক্ষ $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(দ্বিতীয় ধাপ) : ধরি, (1) বাক্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য। অর্থাৎ,

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+ .... +\frac{1}{m(m+1)}=\frac{m}{m+1} \quad ....(2)$$

এখন (1) বাক্যটি $n = m + 1$ এর জন্য সত্য হবে যদি

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+ .... +\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}=\frac{m+1}{(m+2)} \quad ....(3)$$

সত্য হয়।

এখন (2) এর উভয়পক্ষে $\frac{1}{(m+1)(m+2)}$ যোগ করে পাই,

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+ .... +\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

$$=\frac{m}{(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}=\frac{m(m+2)+1}{(m+1)(m+2)}=\frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)}=\frac{m+1}{m+2}$$

সুতরাং (3) সত্য, অর্থাৎ সূত্রটি $n = m + 1$ এর জন্য সত্য।

অতএব, গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সূত্রটি সকল স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য সত্য।

মন্তব্য। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি স্বাভাবিক সংখ্যা চলক n সম্বলিত কোনো উক্তি বা সূত্র $P(n)$ প্রমাণের একটি শক্তিশালী হাতিয়ার। অবশ্য, এই পদ্ধতি প্রয়োগের জন্য পূর্বেই $P(n)$ এর সঠিক রূপ ($n = 1, 2, 3,$ .... ইত্যাদি ক্ষেত্রে দাবির সত্যতা হবে) আমাদের অনুমান করে নিতে হয়।

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির প্রয়োগের প্রথম ধাপকে আরোহ আরম্ভ (Induction beginning) এবং দ্বিতীয় ধাপকে আরোহ স্তর (Induction step) বলা হয়। $P(n)$ সম্পর্কে আমাদের অনুমান সঠিক না হলে আরোহ স্তর প্রমাণ করা যাবে না।

অনুশীলনী ৩

N এর মৌলিক স্বীকার্যসমূহ ব্যবহার করে সমাধান কর (প্রশ্ন ১-৪) :

১। যদি $m, n, k \in N$ হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $m + k = n + k$ হলে, $m = n$ হবে। (ii) $mk = nk$ হলে, $m = n$ হবে।

২। যদি $m, n, k, \in N$ হয়, তবে দেখাও যে, $(m + n)k = mk + nk$ হবে ।

৩। যদি $m, n, k \in N$ এবং $m < n$ হয়, তবে দেখাও যে, $m + k < n + k$ হবে।

৪। দেখাও যে, $S = N$ যেখানে

(i) $S = \{n : n \in N$ এবং $2^{2n} - 1$ রাশিটি 3 দ্বারা বিভাজ্য$\}$

(ii) $S = \{n : n \in N$ এবং $2^{2n-1} + 1$ রাশিটি 3 দ্বারা বিভাজ্য$\}$

(iii) $S = \{n : n \in N$ এবং $5^n - 2^n$ রাশিটি 3 দ্বারা বিভাজ্য$\}$

৫। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে, সকল $n \in N$ এর জন্য

(ক) $1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots\ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$

(খ) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(গ) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

(ঘ) $a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots\ldots\ldots + \{a + (n-1)d\} = \dfrac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}.$

(ঙ) $a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r \neq 1$

(চ) $\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}.$

(ছ) $x^n - y^n$ রাশিটি $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য।

(জ) প্রথম n সংখ্যক বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি n^2.

বহুনির্বাচনী ও সৃজনশীল প্রশ্নাবলী

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। i. যদি $K, m, n \in N$ হয়, তবে $K(m + n) \neq Km + Kn$

ii. যদি $S \subset N$ এমন হয় যে,

$1 \in S$ এবং $n \in S$ হলে $n + 1 \in S$ হয় তবে $S = N$

iii. $x^n - y^n$ রাশিটি $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য সেখানে $n \in N$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii　　খ. ii ও iii

গ. i ও iii　　ঘ. i, ii ও iii

২। $S = \{n : n \in N$ এবং $2^{2n} - 1$ রাশিটি 3 দ্বারা বিভাজ্য$\}$
সেট S নিচের কোনটি হবে যখন $N \leq 3$

ক. $\{3, 15, 63\}$　　খ. $\{1, 5, 21\}$

গ. $\{3, 6, 9\}$　　ঘ. $\{1, 2, 3\}$

৩। $m, n, k \in N$

i. $m + k = n + k$ হলে ; $m = n$

ii. $m < n$ হলে ; $m + k < n + k$

iii. $k < m$ এবং $m < n$ হলে ; $n > k$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i　　খ. ii ও iii

গ. i ও iii　　ঘ. iii

চতুর্থ অধ্যায়

সূচক ও লগারিদম

৪.১। মূলদ সূচক

মূলদ সূচক সম্বলিত a^m আকারের প্রতীকের সঙ্গে আমরা ইতঃপূর্বে পরিচিত হয়েছি (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য), যেখানে a কে ভিত্তি (base) এবং m কে সূচক (exponent) বলা হয়। a^m কে a এর m ঘাত বা শক্তি (Power) বলা হয় এবং a ঘাত m পড়া হয়।

R সকল বাস্তব সংখ্যার সেট

N সকল স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট

Z সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট

Q সকল মূলদ সংখ্যার সেট নির্দেশ করে।

(ক) ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক

সংজ্ঞা। সকল $a \in R$ এর জন্য

(১) $a^1 = a$

(২) $a^n = a.\ a.\ a.\ ....\ a$, (n সংখ্যক উৎপাদক), যেখানে $n \in N, n > 1$.

প্রতিজ্ঞা ১। $a \in R$ এবং $n \in \mathbf{N}$ হলে, $a^1 = a,\ a^{n+1} = a^n.a$

প্রমাণ : সংজ্ঞানুযায়ী $a^1 = a$ এবং $n \in N$ এর জন্য

$$a^{a+1} = \overbrace{\underbrace{a.a.a \quad\quad\quad a.a.}_{n\ \text{সংখ্যক}} = }^{n+1\ \text{সংখ্যক}} a^n.a$$

প্রতিজ্ঞা ২। $a \in R$ এবং $m, n \in \mathbf{N}$ হলে, $a^m.a^n = a^{m+n}$

প্রমাণ : যে কোন $m \in N$ নির্দিষ্ট করে এবং n কে চলক ধরে খোলা বাক্য $a^m.a^n = a^{m+n}$ ....(1) বিবেচনা করি।

(1) এ $n = 1$ বসিয়ে দেখা যায় যে,

বামপক্ষ $= a^m.a^1 = a^m.a = a^{m+1}$ [প্রতিজ্ঞা ১] ডানপক্ষ $= a^{m+1}$

$\therefore n = 1$ এর জন্য (1) সত্য।

এখন ধরি, $n = k$ এর জন্য (1) সত্য। অর্থাৎ $a^m.a^k = a^{m+k}$ ....(2)

তাহলে, $a^m.a^{k+1} = a^m.(a^k.a)$ [প্রতিজ্ঞা ১]

$= (a^m.a^k).a$ [গুণের সহযোজন]

$= a^{m+k}.a$ [আরোহ-কল্পনা]

$= a^{m+k+1}$ [প্রতিজ্ঞা ১]

অর্থাৎ, $n = k + 1$ এর জন্য (1) সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সকল $n \in N$ এর জন্য (1) সত্য।

$\therefore$ যে কোন $m, n \in N$ এর জন্য $a^m.a^n = a^{m+n}$

মন্তব্য : এই প্রতিজ্ঞায় বর্ণিত $a^m.a^n = a^{m+n}$ সূত্রটিকে সূচকের মৌলিক সূত্র বলা হয়।

প্রতিজ্ঞা ৩। $a \in R, a \neq 0$ এবং, $m, n \in \mathbf{N}$ হলে,

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{যখন } m > n \text{ হয়} \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{যখন } m < n \text{ হয়} \end{cases}$$

প্রমাণ : (১) মনে করি, $m > n$, তাহলে $m - n \in N$

$\therefore a^{m-n}.a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$ [প্রতিজ্ঞা ২]

$\therefore \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ [ভাগের সংজ্ঞা]

(২) মনে করি, $m < n$, তাহলে $n - m \in \mathbf{N}$

$\therefore a^{n-m}.a^m = a^{(n-m)+m} = a^n$ [প্রতিজ্ঞা ২]

$\therefore \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ [ভাগের সংজ্ঞা]

প্রতিজ্ঞা ২ এর প্রমাণের মত গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে প্রতিজ্ঞা ৩ প্রমাণ করা যায়।

প্রতিজ্ঞা ৪। $a \in R$ এবং $m, n \in \mathbf{N}$ হলে, $(a^m)^n = a^{mn}$

প্রতিজ্ঞা ৫। $a, b \in R$ এবং $n \in \mathbf{N}$ হলে, $(a.b)^n = a^n.b^n$

উপরিউক্ত প্রতিজ্ঞা দ্বারা আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণ ১। $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4} = \frac{3^3}{4^3}$; $2^5.2^3 = 2^{5+3} = 2^8$;

$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$; $\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^{5-3}} = \frac{1}{2^2}$;

$(4^3)^6 = 4^{3\times6} = 4^{18}$; $(a^2b^3)^5 = (a^2)^5.(b^3)^5 = a^{2\times5}.b^{3\times5} = a^{10}b^{15}$.

(খ) শূন্য ও ঋণাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক

সংজ্ঞা। $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ হলে,

(৩) $a^0 = 1$; (৪) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, যেখানে $n \in \mathbf{N}$.

মন্তব্য : সূচকের ধারণা সম্প্রসারণের সময় লক্ষ্য রাখা হয় যেন সূচকের মৌলিক সূত্র $a^m.a^n = a^{m+n}$ সকল ক্ষেত্রেই বৈধ থাকে। সূত্রটি যদি $m = 0$ এর জন্য সত্য হতে হয়, তবে $a^o.a^n = a^{o+n} = a^n$ অর্থাৎ $a^o = \frac{a^n}{a^n} = 1$ হতে হবে। একইভাবে, সূত্রটি যদি $m = -n$ $(n \in N)$ এর জন্য সত্য হতে হয়,

তবে $a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$ অর্থাৎ, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ হতে হবে। এদিকে লক্ষ্য রেখেই উপরের সংজ্ঞা বর্ণনা করা হয়েছে।

উদাহরণ ২। $7^0 = 1, (-12)^0 = 1, 3^{-1} = \frac{1}{3}$,

$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$, $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{\cdot}1$, $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

উদাহরণ ৩। দেখাও যে, সকল $m, n \in N$ এর জন্য $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, যেখানে $a \neq 0$।

সমাধান : $m > n$ হলে, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ [প্রতিজ্ঞা ৩]

$m < n$ হলে, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ [প্রতিজ্ঞা ৩]

$= a^{-(n-m)}$ [প্রতিজ্ঞা ৪]

$= a^{m-n}$

$m = n$ হলে, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = 1 = a^0$ [সংজ্ঞা ৩]

$= a^{m-m} = a^{m-n}$.

দ্রষ্টব্য। উপরে বর্ণিত সূচকের সংজ্ঞাগুলো থেকে যে কোনো $m \in \mathbf{Z}$ এর জন্য a^m এর ব্যাখ্যা পাওয়া যায়, যেখানে $a \neq 0$. সূচক ধনাত্মক অথবা শূন্য অথবা ঋণাত্মক ধরে সাধারণভাবে সকল পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য নিম্নোক্ত প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণ করা যায়।

প্রতিজ্ঞা ৬। $a \neq 0, b \neq 0$ এবং $m, n \in \mathbf{Z}$ হলে, (ক) $a^m.a^n = a^{m+n}$ (খ) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(গ) $(a^m)^n = a^{mn}$ (ঘ) $(ab)^n = a^n b^n$ (ঙ) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

এই প্রতিজ্ঞার ক্ষেত্রবিশেষের আলোচনার জন্য উদাহরণ ও অনুশীলনী দ্রষ্টব্য।

উদাহরণ ৪ । $m, n \in \mathbf{N}$ হলে, $(a^m)^n = a^{mn}$ সূত্রটির সত্যতা স্বীকার করে নিয়ে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$, যেখানে $a \neq 0$ এবং $m \in \mathbf{N}$ ও $n \in \mathbf{Z}$.

সমাধান : (১) এখানে $(a^m)^n = a^{mn}$ ....(1) যেখানে $a \neq 0$ এবং $m \in N$ ও $n \in Z$.

প্রথমে মনে করি, $n > 0$, এক্ষেত্রে (1) এর সত্যতা স্বীকার করে নেওয়া হয়েছে।

(২) এখন মনে করি $n = 0$, এক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^0 = 1 \therefore a^{mn} = a^0 = 1 \therefore$ (1)সত্য।

(৩) সবশেষে মনে করি $n < 0$ এবং $n = -k$, যেখানে $k \in \mathbf{N}$.

এক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^{-k} = \dfrac{1}{(a^m)^k} = \dfrac{1}{a^{mk}} = a^{-(mk)} = a^{m(-k)} = a^{mn}$.

অনুশীলনী ৪.১

১। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$, যেখানে $a \in R$ এবং $n \in \mathbf{N}$.

২। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a.b)^n = a^n.b^n$ যেখানে $a, b \in R$ এবং $n \in \mathbf{N}$.

৩। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে,
$(\frac{1}{a})^n = \frac{1}{a^n}$, যেখানে $a > 0$ এবং $n \in N$। অতঃপর $(ab)^n = a^nb^n$ সূত্র ব্যবহার করে দেখাও যে,
$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ যেখানে, $a, b \in \mathbf{R}, b > 0$ এবং $n \in \mathbf{N}$.

৪। মনে কর, $a \neq 0$ এবং $m, n \in \mathbf{Z}$. ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য $a^m.a^n = a^{m+n}$. সূত্রটির সত্যতা স্বীকার করে দেখাও যে, $a^m.a^n = a^{m+n}$

যখন (i) $m > 0$ এবং $n < 0$; (ii) $m < 0$ এবং $n < 0$.

৫। মনে কর, $a \neq 0$ এবং $b \neq 0$. ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য $(ab)^n = a^nb^n$ সূত্রটির সত্যতা স্বীকার করে দেখাও যে, সকল $n \in \mathbf{Z}$ এর জন্য $(ab)^n = a^nb^n$

৬। মনে কর, $a \neq 0$ এবং $m, n \in \mathbf{Z}$ ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য $(a^m)^n = a^{mn}$ সূত্রটির সত্যতা স্বীকার করে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$, যখন (i) $m < 0$ এবং $n > 0$;
(ii) $m < 0$ এবং $n < 0$.

(গ) n তম মূল ($n \in N$)

সংজ্ঞা। $n \in \mathbf{N}, n > 1$ এবং $a \in R$ হলে, যদি এমন $x \in R$ থাকে যেন $x^n = a$ হয়, তবে সেই x কে a এর একটি n তম মূল বলা হয়। 2 তম মূলকে বর্গমূল এবং 3 তম মূলকে ঘনমূল বলা হয়।

উদাহরণ ৫। (i) 2 এবং -2 উভয়ই 16 এর 4 তম মূল, কারণ $(2)^4 = 16$ এবং $(-2)^4 = 16$

(ii) -27 এর ঘনমূল -3, কারণ $(-3)^3 = -27$.

(iii) 0 এর n তম মূল 0, কারণ সকল n এর জন্য $0^n = 0$।

(iv) -9 এর কোনো বর্গমূল নেই, কারণ যে কোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল অঋণাত্মক। এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে,

(ক) যদি $a > 0$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$ হয়, তবে a এর একটি অনন্য ধনাত্মক n তম মূল আছে। এই ধনাত্মক মূলকে $\sqrt[n]{a}$ দ্বারা সূচিত করা হয় ($\sqrt[2]{a}$ এর স্থলে $\sqrt{a}$ লেখা হয়) এবং একে a এর মুখ্য n তম মূল বলা হয়। n জোড় সংখ্যা হলে এরূপ a এর অপর একটি n তম মূল আছে এবং তা হল $-\sqrt[n]{a}$.

(খ) যদি $a < 0$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$, n বিজোড় সংখ্যা হয়, তবে a এর একটি মাত্র n তম মূল আছে যা ঋণাত্মক। এই মূলকে $\sqrt[n]{a}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। n জোড় হলে এবং a ঋণাত্মক হলে a এর কোন n তম মূল নেই।

(গ) 0 এর n তম মূল $\sqrt[n]{0} = 0$.

দ্রষ্টব্য। (১) $a > 0$ হলে, $\sqrt[n]{a} > 0$.

(২) $a < 0$ এবং n বিজোড় হলে, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} < 0$, (যেখানে $|a|$ হচ্ছে a এর পরম মান)

উদাহরণ ৬। $\sqrt{4} = 2$, $(\sqrt{4} \neq -2)$,

$$\sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt[3]{8},$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \text{ যখন } a > 0 \\ -a, \text{ যখন } a < 0 \end{cases}$$

প্রতিজ্ঞা ৭। $a < 0$ এবং $n \in N, n > 1$, n বিজোড় হলে দেখাও যে, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$

[এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে, $|a| = \begin{cases} a, \text{ যখন } a > 0 \\ -a, \text{ যখন } a < 0 \end{cases}$ এবং $a \neq 0$ হলে, $|a| > 0$]

সমাধান : মনে করি, $\sqrt[n]{|a|} = x$

তাহলে, $x^n = |a|$ [মূলের সংজ্ঞা]

বা, $x^n = -a$ [$|a|$ এর সংজ্ঞা]

বা, $-x^n = a$

বা, $(-x)^n = a$ [$\because$ n বিজোড়] $\therefore \sqrt[n]{a} = -x$ [মূলের সংজ্ঞা]

সুতরাং, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$; কেননা a-এর n-তম মূল অনন্য।

উদাহরণ : $\sqrt[3]{-27} = -3 = -\sqrt[3]{27}$

প্রতিজ্ঞা ৮। $a > 0, m \in \mathbf{Z}$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$ হলে, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

প্রমাণ : মনে করি $\sqrt[n]{a} = x$ এবং $\sqrt[n]{a^m} = y$. তাহলে, $x^n = a$ এবং $y^n = a^m$

$\therefore y^n = a^m = (x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n$

যেহেতু $y > 0, x^m > 0$, সুতরাং মুখ্য n তম মূল বিবেচনা করে পাই, $y = x^m$

$\therefore \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ অর্থাৎ, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

প্রতিজ্ঞা ৯। যদি $a > 0$ এবং $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ হয়, যেখানে $m, p \in \mathbf{Z}$ এবং $n, q \in \mathbf{N}, n > 1, q > 1,$

তবে $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p]{a^p}.$

প্রমাণ : এখানে $qm = pn$; মনে করি, $\sqrt[n]{a^m} = x$ তাহলে, $x^n = a^m \therefore (x^n)^q = (a^m)^q$

$\therefore x^{qn} = a^{qm} = a^{pn}$ বা, $(x^q)^n = (a^p)^n$

$\therefore x^q = a^p$ [মুখ্য n –তম মূল বিবেচনা করে] $\therefore x = \sqrt[q]{a^p}$ $\therefore \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$

অনুসিদ্ধান্ত । যদি $a > 0$ এবং $n, k \in \mathbf{N}, n > 1$ হয়, তবে $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$

(ঘ) মূলদ ভগ্নাংশ সূচক

সংজ্ঞা। $a \in \mathbf{R}$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$ হলে,

(৫) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ যখন $a > 0$ অথবা $a < 0$ এবং n বিজোড়।

মন্তব্য ১। সূচক নিয়ম $(a^m)^n = a^{mn}$ [প্রতিজ্ঞা ৬ দ্রষ্টব্য] যদি সকল ক্ষেত্রে সত্য হতে হয়, তবে $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$ হতে হবে অর্থাৎ, $a^{\frac{1}{n}}$ এর n –তম মূল হতে হবে। এজন্য একাধিক মূলের ক্ষেত্রে দ্ব্যর্থতা পরিহারের লক্ষ্যে উপরের সংজ্ঞা বর্ণনা করা হয়েছে।

মন্তব্য ২। $a < 0$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$, n বিজোড় হলে প্রতিজ্ঞা ৭ থেকে দেখা যায় যে, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} = -|a|^{\frac{1}{n}}$ এরূপ ক্ষেত্রে এই সূত্রের সাহায্যেই $a^{\frac{1}{n}}$ এর মান নির্ণয় করা হয়।

মন্তব্য ৩। a মূলদ সংখ্যা হলেও অধিকাংশ ক্ষেত্রে $a^{\frac{1}{n}}$ অমূলদ সংখ্যা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে $a^{\frac{1}{n}}$ এর আসন্ন মান ব্যবহার করা হয় ।

সংজ্ঞা। $a > 0, m \in \mathbf{Z}$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$ হলে,

(৬) $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$

দ্রষ্টব্য ১। সংজ্ঞা (৫) ও (৬) এবং প্রতিজ্ঞা ৮ থেকে দেখা যায় যে,

$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, যেখানে $a > 0, m \in z$ এবং $n \in N, n > 1.$

সুতরাং $p \in \mathbf{Z}$ এবং $q \in \mathbf{N}, n > 1$ যদি এমন হয় যে, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ হয়,

তবে প্রতিজ্ঞা ৯ থেকে দেখা যায় যে, $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$

দ্রষ্টব্য ২। পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক এবং মূলদ ভগ্নাংশ সূচকের সংজ্ঞা থেকে a^r এর ব্যাখ্যা পাওয়া যায় যেখানে $a > 0$ এবং $r \in \mathbf{Q}$. উপরের আলোচনা থেকে দেখা যায় যে, $a > 0$ হলে, r কে বিভিন্ন সমতুল্য ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা হলেও a^r এর মানের কোনো তারতম্য হয় না।

দ্রষ্টব্য ৩। প্রতিজ্ঞা ৬ এ বর্ণিত সূচক নিয়মগুলো সাধারণভাবে যে কোনো মূলদ সূচকের জন্যও সত্য হয় ।

প্রতিজ্ঞা ১০। $a > 0, b > 0$ এবং $r, s \in \mathbf{Q}$ হলে (ক) $a^r . a^s = a^{r+s}$ (খ) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ (গ) $(a^r)^s = a^{rs}$ (ঘ) $(ab)^r = a^r b^r$ (ঙ) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

এই প্রতিজ্ঞার ক্ষেত্র বিশেষের প্রমাণের জন্য উদাহরণ ও অনুশীলনী দ্রষ্টব্য । (ক) ও (ঘ) এর পুনঃপুন প্রয়োগের মাধ্যমে দেখা যায় যে,

অনুসিদ্ধান্ত । (১) $a > 0$ এবং $r_1, r_2, \ldots\ldots\ldots. r_k \in \mathbf{Q}$ হলে $a^{r_1}.a^{r_2} \ldots\ldots\ldots a^{r_k} = a^{r_1 + r_2 + \ldots. + r_k}$

(২) $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots\ldots\ldots., a_n > 0$ এবং $r \in \mathbf{Q}$ হলে,

$$(a_1.a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots. a_n)^r = a_1^r.a_2^r \ldots\ldots\ldots a_n^r$$

উদাহরণ ৭। দেখাও যে,

$a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ যেখানে, $a > 0; m, p \in \mathbf{Z}; n, q \in \mathbf{N}, n > 1, q > 1.$

সমাধান : $\frac{m}{n}$ ও $\frac{p}{q}$ কে সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করে দেখা যায় যে,

$a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{np}{nq}} = \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq} \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{np}$ [সংজ্ঞা ৬]

$= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq+np}$ [প্রতিজ্ঞা ৬] $= a^{\frac{mq+np}{nq}}$ [সংজ্ঞা ৬] $= a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

৪.২। অমূলদ সূচক

$a > 0$ হলে অমূলদ সূচক x এর জন্যও a^x বিবেচনা করা হয়। এ সম্পর্কে বিশদ আলোচনা এই পুস্তকের আওতা বহির্ভূত। এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে,

(ক) অমূলদ সূচকের জন্য a^x এর মান এমন ভাবে নির্দিষ্ট করা হয় যে x এর মূলদ আসন্ন মান p এর জন্য a^p এর মান a^x এর মানের আসন্ন হয়। উদাহরণস্বরূপ, $3^{\sqrt{5}}$ সংখ্যাটি বিবেচনা করি। আমরা জানি, $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা এবং $\sqrt{5} = 2{\cdot}236067977........$ (এই মান ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে পাওয়া গিয়েছে এবং দশমিক বিস্তার যে অনন্ত তা ....দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে)।$\sqrt{5}$ এর আসন্ন মান হিসেবে

$p_1 = 2{\cdot}23$ $\quad$ $p_2 = 2{\cdot}236$

$p_3 = 2{\cdot}2360$ $\quad$ $p_4 = 2{\cdot}236067$

$p_5 = 2{\cdot}2360679$ $\quad$ $p_6 = 2{\cdot}23606797$

বিবেচনা করে $3^{\sqrt{5}}$ এর আসন্ন মান হিসেবে

$q_1 = 3^{2{\cdot}23} = 11{\cdot}5872505$ ....

$q_2 = 3^{2{\cdot}236} = 11{\cdot}6638822$ ....

$q_3 = 3^{2{\cdot}23606} = 11{\cdot}6646510$ ....

$q_4 = 3^{2{\cdot}236067} = 11{\cdot}6647407$ ....

$q_5 = 3^{2{\cdot}2360679} = 11{\cdot}6647523$ ....

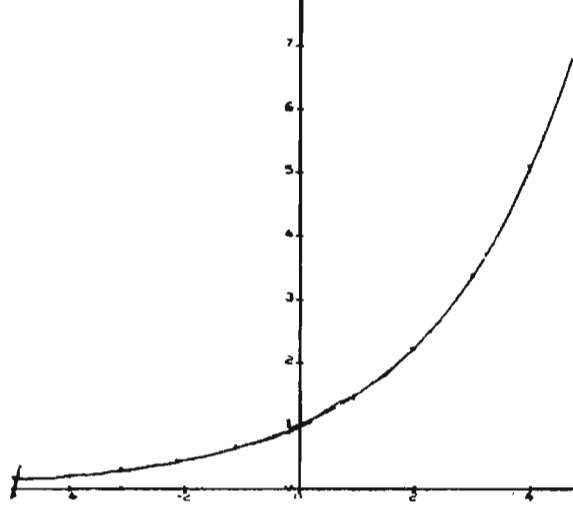
$q_6 = 3^{2{\cdot}23606797} = 11{\cdot}6647532$ ....

পাওয়া যায় (এই মানগুলোও ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে পাওয়া গিয়েছে) বাস্তবিক পক্ষে,

$3^{\sqrt{5}} = 11{\cdot}6647533$ ....

(খ) নির্দিষ্ট ধনাত্মক a এর জন্য x চলকের সুবিধাজনক কতকগুলো মূলদ মান নিয়ে a^x এর আসন্ন মান নির্ণয় করে $y = a^x$ সমীকরণের লেখ এঁকে লেখ থেকে দুইটি মূলদ সংখ্যার অন্তর্বর্তী সকল x এর জন্য a^x এর মানের ধারণা পাওয়া যায়। উদাহরণস্বরূপ, $y = (1{\cdot}5)^x$ সমীকরণের জন্য ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিচের ছকটি তৈরি করা যেতে পারে :

x	0	1	2	3	4	5	-1	-2	-3	-4
y	1	1·50	2·25	3·38	5·06	7·59	0·67	0·44	0·30	0·20

এখন ছক কাগজে সুবিধাজনক একক নিয়ে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করে বিন্দুগুলো দিয়ে একটি স্বচ্ছন্দ রেখা এঁকে নিচের লেখচিত্রটি পাওয়া যাবে।

এই লেখচিত্র থেকে $y = (1 \cdot 5)^x$ এর আসন্ন মান পাওয়া যায়, যেখানে $-4 \leq x \leq 5$।

(গ) $a > 0$ হলে, সকল $x \in \mathbf{R}$ এর জন্য $a^x > 0$.

(ঘ) $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হলে, প্রত্যেক $y > 0$ এর জন্য একটি অনন্য $x \in \mathbf{R}$ নির্দিষ্ট করা যায় যেন $a^x = y$ হয়।

(ঙ) প্রতিজ্ঞা ১০ এ বর্ণিত সূচক নিয়মগুলো মূলদ-অমূলদ সকল সূচকের জন্য অর্থাৎ, সকল $r, s \in R$ এর জন্য সত্য হয়।

(চ) যদি $x < y$ হয়, তবে $a^x < a^y$ যখন $a > 1$ এবং $a^x > a^y$ যখন $0 < a < 1$.

সকল x এর জন্য $1^x = 1$.

(ছ) $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হলে, $a^x = a^y$ হবে যদি ও কেবল যদি $x = y$ হয়।

(জ) $a > 0, b > 0$ এবং $x \neq 0$ হলে, $a^x = b^x$ হবে যদি ও কেবল যদি $a = b$ হয়।

কয়েকটি উদাহরণ

[এই উদাহরণগুলোতে উল্লিখিত সকল ঘাতের ভিত্তি ধনাত্মক ও ১ থেকে ভিন্ন ধর্তব্য]।

উদাহরণ ৮। দেখাও যে, $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1$.

সমাধান : বামপক্ষ $= \left(p^{a-b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(p^{b-c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(p^{c-a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= p^{a^3 - b^3 + b^3 - c^3 + c^3 - a^3} = p^0 = 1 =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ ৯। সরল কর :

$$\frac{1}{1 + a^{y-z} + a^{y-x}} + \frac{1}{1 + a^{z-x} + a^{z-y}} + \frac{1}{1 + a^{x-y} + a^{x-z}}$$

সমাধান : এখানে $\frac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}} = \frac{a^{-y}}{a^{-y}(1+a^{y-z}+a^{y-x})} = \frac{a^{-y}}{a^{-y}+a^{-z}+a^{-x}}$

একই ভাবে, $\frac{1}{1+a^{z-x}+a^{z-y}} = \frac{a^{-z}}{a^{-z}+a^{-x}+a^{-y}}$ এবং $\frac{1}{1+a^{x-y}+a^{x-z}} = \frac{a^{-z}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি = $\frac{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}} = 1$

উদাহরণ ১০। যদি $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ এবং $abc = 1$ হয়, হবে দেখাও যে, $x + y + z = 0$.

সমাধান : ধরি, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$. তাহলে পাই, $a = k^x, b = k^y, c = k^z$.

$\therefore abc = k^x k^y k^z = k^{x+y+z}$. দেওয়া আছে, $abc = 1$ $\therefore$ $k^{x+y+z} = k^0$ $\therefore$ $k^{x+y+z} = k^0$

$\therefore$ $x + y + z = 0$.

উদাহরণ ১১। যদি $a^b = b^a$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $a^b = b^a$, $\therefore$ $a^{\frac{b}{b}} = b^{\frac{a}{b}}$ বা $a = b^{\frac{a}{b}}$

এখন $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{a} = a^{\frac{a}{b}-1}$

উদাহরণ ১২। যদি $xyz \neq 0$, $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $a^x = b^y$, $\therefore$ $a = b^{\frac{x}{y}}$ আবার $c^z = b^y$ $\therefore$ $c = b^{\frac{y}{z}}$

এখন $b^2 = ac = b^{\frac{y}{x}} b^{\frac{z}{x}} = b^{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}$ $\therefore$ $\frac{y}{x} + \frac{y}{z} = 2$ বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$.

উদাহরণ ১৩। যদি $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$ এবং $c = xy^{r-1}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1$.

সমাধান : বাম পক্ষ = $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q}$

$= (xy^{p-1})^{q-r} (xy^{q-1})^{r-p} (xy^{r-1})^{p-q}$

$= x^{q-r} y^{(p-1)(q-r)} x^{r-p} y^{(q-1)(r-p)} x^{p-q} y^{(r-1)(p-q)}$

$= x^{q-r+r-p+p-q} y^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$

$= x^0 y^{pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+pr-qr-p+q}$

$= x^0 y^0 = 1 \times 1 = 1$ = ডানপক্ষ।

উদাহরণ ১৪ । যদি $a = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3 - 6a^2 + 6a - 2 = 0$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $a = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ $\therefore\ a - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

বা, $(a-2)^3 = (2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}})^3 = 2^2 + 2 + 3.2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)$

$(a-2)^3 = 6 + 6(a-2)$ [$\because 2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$ এবং $2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} = a - 2$]

বা, $a^3 - 3a^2.2 + 3a.2^2 - 2^3 = 6 + 6(a-2)$ বা, $a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = 6 + 6a - 12$

বা, $a^3 - 6a^2 + 6a - 2 = 0$.

অনুশীলনী ৪.২

[নিচের প্রশ্নগুলোতে সকল ঘাতের ভিত্তি ধনাত্মক ও 1 থেকে ভিন্ন ধর্তব্য]

১। প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}}$ যেখানে $m, p \in \mathbf{Z}$ এবং $n \in \mathbf{N}$.

২। প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$ যেখানে $m,n \in N$.

৩। প্রমাণ কর যে, $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$, যেখানে $m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}$.

৪। দেখাও যে,

(ক) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = a - b$

(খ) $\dfrac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} = (a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1)$

৫। সরল কর :

(ক) $\left\{(x^{\frac{1}{a}})^{\frac{a^2 - b^2}{a - b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

(খ) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + ab}{ab - b^3} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

(গ) $$\frac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$$

(ঘ) $$\frac{1}{1+a^{-m}b^{n}+a^{-m}c^{p}}+\frac{1}{1+b^{-n}c^{p}+b^{-n}a^{m}}+\frac{1}{1+c^{-p}a^{m}+c^{-p}b^{n}}$$

(ঙ) $$\sqrt[bc]{\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}} \times \sqrt[ca]{\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$$

(চ) $$\frac{(a^2 - b^{-2})^a (a - b^{-1})^{b-a}}{(b^2 - a^{-2})^b (b + a^{-1})^{a-b}}$$

৬। দেখাও যে,

(ক) যদি $x = a^{q+r} b^p, y = a^{r+p} b^q, z = a^{p+q} b^r$ হয়, তবে $x^{q-r}. y^{r-p}. z^{p-q} = 1$

(খ) যদি $a^p = b, b^q = c$ এবং $c^r = a$ হয়, তবে $pqr =1$.

(গ) যদি $a^x = p, a^y = q$ এবং $a^2 = (p^y q^x)^z$ হয়, তবে $xyz = 1$

৭। (ক) যদি $x\sqrt[3]{a}+y\sqrt[3]{b}+z\sqrt[3]{c} = 0$ এবং $a^2 = bc$ হয়,

তবে দেখাও যে, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$

(খ) যদি $x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$ হয়,

তবে দেখাও যে, $x^3 - 3cx - 2a = 0$.

(গ) যদি $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{-1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$.

(ঘ) যদি $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}$ এবং $a \geq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $3a^3 + 9a = 8$.

(ঙ) যদি $a^2 = b^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{-1}{3}}$

(চ) যদি $b = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$.

৪.৩। লগারিদম

সংজ্ঞা। মনে করি, $a > 0$ এবং $a \neq 1$ এক্ষেত্রে যদি $a^x = y$ হয়, তবে x কে বলা হয় y এর a ভিত্তিক লগারিদম, অর্থাৎ, $x = \log_a y$।

মন্তব্য। উপরের সংজ্ঞায় $a > 0$ এবং $a \neq 1$ ধরা হয়েছে। লগারিদমের বর্ণনায় সবসময় 1 থেকে ভিন্ন কোনো ধনাত্মক সংখ্যাকে ভিত্তি ধরা হবে। সেজন্য ভিত্তি a সম্পর্কে কোনো কিছু উল্লেখ না থাকলে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ বিবেচ্য।

এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে,

(১) $a > 0$ হওয়ায় সকল $x \in \mathbf{R}$ এর জন্য $a^x > 0$। সুতরাং $y \leq 0$ হলে y এর a ভিত্তিক কোনো লগারিদম নেই। অর্থাৎ, শুধু ধনাত্মক রাশিরই লগারিদম বিবেচ্য।

(২) $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হওয়ায় প্রত্যেক ধনাত্মক y এর জন্য একটি অনন্য $x \in \mathbf{R}$ আছে যেন $a^x = y$ হয়।
ফলে, $y > 0$ হলে y এর একটি অনন্য a ভিত্তিক লগারিদম আছে।

$a > 0$ ও $a \neq 1$ এবং $y > 0$ হলে y এর অনন্য a ভিত্তিক লগারিদমকে $\log_a y$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং,

(ক) $\log_a y = x$ যদি ও কেবল যদি $a^x = y$ হয়।

(ক) থেকে দেখা যায় যে,

(খ) $\log_a(a^x) = x$

(গ) $a^{\log_a y} = y$.

উদাহরণ ১।

(১) $2^3 = 8$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_2 8 = 3$

(২) $3^4 = 81$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_3 81 = 4$

(৩) $4^2 = 16$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_4 16 = 2$

(৪) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_5(\frac{1}{25}) = -2$

(৫) $(64)^{4/3} = 256$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_{64} 256 = \frac{4}{3}$

(৬) $10^3 = 1000$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_{10} 1000 = 3$

(৭) $10^{-2} = 0 \cdot 01$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\log_{10} 0 \cdot 01 = -2$

(৮) $7^{\log_7 9} = 9$, এবং $18 = \log_2 2^{18}$ (সূত্র (২) এবং সূত্র (৩) অনুসারে)।

প্রতিজ্ঞা ১। যদি $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হয়, তবে

(ঘ) $\log_a 1 = 0$ এবং (ঙ) $\log_a a = 1$

প্রমাণ : (ঘ) যদি $a \neq 0$ হয়, তবে $a^0 = 1$.

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে, $\log_a 1 = 0$.

(ঙ) যদি $a \neq 1$ হয়, তবে $a^1 = a$. সুতরাং সংজ্ঞানুসারে, $\log_a a = 1$.

উদাহরণ ২। $\log_5 5 = 1$. যেহেতু $5^1 = 5$ $\log_{1/2}(\frac{1}{2}) = 1$ যেহেতু $(\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2}$

প্রতিজ্ঞা ২। যদি $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হয়, তবে

(চ) $\log_a PQ = \log_a P + \log_a Q$ যেখানে $P > 0$ এবং $Q > 0$.

প্রমাণ : ধরি, $x = \log_a P$, $y = \log_a Q$.

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে, $a^x = P$, $a^y = Q$. এখন $PQ = a^x a^y = a^{x+y}$

অতএব সংজ্ঞানুসারে, $\log_a PQ = x + y = \log_a P + \log_a Q$.

অনুসিদ্ধান্ত । $\log_a (ABC........... K)$

$$= \log_a A + \log_a B + \log_a C + ... + \log_a K$$

যেখানে A, B, ... K প্রত্যেকে ধনাত্মক।

উদাহরণ ৩। $\log_2 5 + \log_2 7 + \log_2 3 = \log_2 (5.7.3) = \log_2 105$.

মন্তব্য। সাধারণভাবে,

$\log_a(P+Q) \neq \log_a P + \log_a Q$; $\log_a(PQ) \neq \log_a P. \log_a Q$

প্রতিজ্ঞা ৩। যদি $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হয়, তবে

(ছ) $\log_a(\frac{P}{Q}) = \log_a P - \log_a Q$

যেখানে $P > 0$ এবং $Q > 0$.

প্রমাণ : ধরি $x = \log_a p$, $y = \log_a Q$ $\therefore a^x = P$, $a^y = Q$. এখন $\frac{P}{Q} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\therefore \log_a(\frac{P}{Q}) = x - y = \log_a P - \log_a Q$.

উদাহরণ ৪। $\log_3 20 - \log_3 5 = \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4$

মন্তব্য। সাধারণভাবে, $\log_a(P-Q) \neq \log_a P - \log_a Q$ $\therefore \log_a(\frac{P}{Q}) \neq \frac{\log_a P}{\log_a Q}$

প্রতিজ্ঞা ৪। যদি $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হয়, তবে

(জ) $\log_a(P^r) = r\log_a P$ যেখানে $P > 0$ এবং $r \in \mathbf{R}$.

প্রমাণ : ধরি $x = \log_a P$ $\therefore a^x = P$ বা, $(a^x)^r = p^r$ বা, $a^{rx} = p^r$

$\therefore\ \log_a (pr) = rx = r \log_a P$

উদাহরণ ৫। $\log_5{}^{64} = \log_5 2^6 = 6 \log_5 2.$

$\log_7 \sqrt[3]{64} = \log_7 64^{\frac{1}{3}}$; বা, $\frac{1}{3} \log_7 64 = \frac{1}{3} \log_7 4^3 = \frac{3}{3} \log_7 4 = \log_7 4.$

প্রতিজ্ঞা ৫। যদি $a, b, P > 0$ এবং $a \neq 1, b \neq 1$ হয়, তবে

(ঝ) $\log_a P = \log_b P \times \log_a b$

প্রমাণ : ধরি $\log_b P = x, \log_a b = y \therefore b^x = P, a^y = b \therefore P = (a^y)^x = a^{xy}$

$\therefore\ \log_a P = xy = \log_b P \times \log_a b$

অনুসিদ্ধান্ত : (ঞ) $\log_a b \times \log_b a = \left| 1 \right|$ হয় তবে, $\log_a P = \dfrac{\log_b P}{\log_b a}$

প্রমাণ : (ঞ) প্রতিজ্ঞা ৫ থেকে $P = a$ ধরে পাই,

$\log_a a = \log_b a \times \log_a b \therefore \log_a b \times \log_b a = \log_a a = 1$ [প্রতিজ্ঞা ১ প্রয়োগ করে]।

উপরের (ঞ) থেকে, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

$\therefore$ প্রতিজ্ঞা ৫ থেকে পাই, $\log_a P = \dfrac{\log_b P}{\log_b a}$

উদাহরণ ৬। $\log_2 3 \log_3 2 = 1$ এবং $\log_5 12 = \dfrac{\log_7 12}{\log_7 5}$ [উপরের অনুসিদ্ধান্ত থেকে]

কতিপয় উদাহরণ :

উদাহরণ ৭। দেখাও যে, $a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b} = 1.$

সমাধান : ধরি, $P = a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b}$

তাহলে $\log_k P = (\log_k b - \log_k c) \log_k a + (\log_k c - \log_k a) \log_k b + (\log_k a - \log_k b) \log_k c.$

$= 0$ [সরল করে] $\therefore\ P = k^0 = 1.$

উদাহরণ ৮। দেখাও যে, $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

প্রমাণ : ধরি $p = \log^a y$, $q = \log_a x$ সুতরাং $a^p = y, a^q = x$

$\therefore (a^p)^q = y^q$ বা, $y^q = a^{pq}$

এবং $(a^q)^p = x^p$ বা, $x^p = a^{pq}$

$\therefore x^p = y^q$, বা, $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

উদাহরণ ৯। দেখাও যে, $\log_a p \times \log_p q \times \log_q r \times \log_r b = \log_a b$.

সমাধান : বামপক্ষ $= (\log_p q \times \log_a p) \times (\log_r b \times \log_q r)$

$= \log_a q \times \log_q b = \log_a b =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ ১০। দেখাও যে, $\dfrac{1}{\log_a (abc)} + \dfrac{1}{\log_b (abc)} + \dfrac{1}{\log_c (abc)} = 1.$

সমাধান : ধরি, $\log_a (abc) = x$, $\log_b(abc) = y$, $\log_c(abc) = z$.

সুতরাং, $a^x = abc$, $b^y = abc$, $c^z = abc$ $\therefore$ $a = (abc)^{1/x}$, $b = (abc)^{1/y}$, $c = (abc)^{1/z}$

এখন $(abc)^1 = abc = (abc)^{1/x} (abc)^{1/y} (abc)^{1/z} = (abc)^{1/x + 1/y + 1/z}$ $\therefore$ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1.$

অর্থাৎ, $\dfrac{1}{\log_a (abc)} + \dfrac{1}{\log_b (abc)} + \dfrac{1}{\log_c (abc)} = 1.$

উদাহরণ ১১। যদি $p = \log_a (bc)$, $q = \log_b (ca)$, $r = \log_c (ab)$ হয়,

তবে দেখাও যে, $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} + \dfrac{1}{r+1} = 1.$

সমাধান : $1 + p = \log_a a + \log_a(bc) = \log_a(abc)$.

একইভাবে $1 + q = \log_b(abc)$, $1 + r = \log_c(abc)$.

কিন্তু উদাহরণ (১০) এ আমরা প্রমাণ করেছি $\dfrac{1}{\log_a (abc)} + \dfrac{1}{\log_b (abc)} + \dfrac{1}{\log_c (abc)} = 1.$

$$\therefore \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} = 1.$$

উদাহরণ ১২। যদি $\dfrac{\log a}{y-z} + \dfrac{\log b}{z-x} + \dfrac{\log c}{x-y}$ হয়, হবে দেখাও যে $a^x b^y c^z = 1$.

সমাধান : ধরি, $\dfrac{\log a}{y-z} + \dfrac{\log b}{z-x} + \dfrac{\log c}{x-y} = k$

তাহলে $\log a = k(y - z)$, $\log b = k(z - x)$, $\log c = k(x - y)$.

$\therefore x \log a + y \log b + z \log c = k(xy - xz + yz - xy + xz - yz) = 0.$

বা, $\log a^x b^y c^z = \log 1$ [$\therefore \log 1 = 0$] $\therefore a^x b^y c^z = 1.$

৪। সাধারণ লগারিদম ও স্বাভাবিক লগারিদম

ব্যবহারিক ক্ষেত্রে সাধারণত 10 ভিত্তিক লগারিদম ব্যবহার করা হয়। অন্যদিকে তত্ত্বীয় গণিতের বিভিন্ন শাখায় স্বাভাবিকভাবেই e– ভিত্তিক লগারিদম বিবেচিত হয়, যেখানে

$e = 2{\cdot}71828182845904.....$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সংজ্ঞা। 10 ভিত্তিক লগারিদমকে সাধারণ লগারিদম (common logarithm) এবং e ভিত্তিক লগারিদমকে স্বাভাবিক লগারিদম (natural logarithm) বলা হয়।

সাধারণ লগারিদমের প্রবর্তন করেন গণিতবিদ হেনরি ব্রিগ্‌স্‌ (১৫৬১–১৬৩১)। সেজন্য সাধারণ লগারিদমকে অনেক সময় ব্রিগ্‌সীয়ান লগারিদম বলা হয়।

স্বাভাবিক লগারিদমের প্রবর্তক গণিতবিদ জন নেপিয়ার (১৫৫০–১৬১৭)। সেজন্য স্বাভাবিক লগারিদমকে নেপিরিয়ান লগারিদমও বলা হয়।

সংজ্ঞা। $y > O$ হলে y এর সাধারণ লগারিদম $x = \log_{10} y$ যেখানে $10^x = y$ এবং y এর স্বাভাবিক লগারিদম $x = \log_e y$ যেখানে $e^x = y$।

মন্তব্য ১। সাধারণ লগারিদম $\log_{10} y$ কে সচরাচর ভিত্তি 10 উহ্য রেখে $\log y$ লিখে প্রকাশ করা হয়। ইদানীং $\log_{10} y$ বোঝাতে $\log y$ প্রতীকও ব্যবহৃত হয়।

মন্তব্য ২। স্বাভাবিক লগারিদম $\log_e y$ বোঝাতে $\ln y$ প্রতীকের ব্যবহার এখন সর্বজন স্বীকৃত।

মন্তব্য ৩। পূর্বেই উল্লেখ করা হয়েছে যে স্বাভাবিক লগারিদমের ভিত্তি e একটি অমূলদ সংখ্যা। বিভিন্ন দশমিক স্থান পর্যন্ত e এর আসন্ন মান।

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

ধারার প্রথম থেকে বিভিন্ন সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করে পাওয়া যায়। যেমন,

প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি = $2{\cdot}7083333.........$

প্রথম আটটি পদের সমষ্টি = $2{\cdot}7182539.........$

প্রথম বারটি পদের সমষ্টি = $2{\cdot}7182818.........$

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করেও e এর আসন্ন মান $2{\cdot}7182818$ পাওয়া যায়।

সাধারণ লগারিদম

সাধারণ লগারিদম নির্ণয় করা সম্পর্কে মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তকে আলোচনা করা হয়েছে।

সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ **(Scientific notation)**

মনে করি, a একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। যদি $a = m \times 10^n$ লেখা হয় যেখানে $1 \le m < 10$ এবং n একটি পূর্ণসংখ্যা, তবে a এর বৈজ্ঞানিক রূপ পাওয়া যায়।

উদাহরণ ১। কয়েকটি সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ নিম্নে দেখানো হল :

$752310000 = 7{\cdot}5231 \times 10^8$
$0{\cdot}0346 = 3{\cdot}46 \times 10^{-2}$
$3215 = 3.215 \times 10^3$
$0{\cdot}0008932 = 8{\cdot}.932 \times 10^{-4}$

প্রতিজ্ঞা। যদি $a > 0$ এবং $a = m\ 10^n$ হয়, তবে $\log a = n + \log m$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $a = m \times 10^n$

$\therefore \log a = \log (m \times 10^n) = \log m + \log 10^n$

$= \log m + n\ [\because \log 10 = \log_{10} 10 = 1]$

সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক এবং অংশক

প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যার সাধারণ লগারিদমের দুইটি অংশ আছে : একটি পূর্ণক (characteristic) এবং অপরটি অংশক (mantissa)। $a = m \times 10^n$ হলে উপরের প্রতিজ্ঞা অনুযায়ী $\log a = \log m + n$ হয়।

n কে log a এর পূর্ণক এবং log m কে log a এর অংশক বলে। log m এর মান লগ তালিকা থেকে বের করতে হয়।

উদাহরণ ২। log 125 এবং log 0·00293 নির্ণয় কর।

সমাধান : $125 = 1{\cdot}25 \times 10^2$.

$\therefore$ log 125 এর পূর্ণক = 2 এবং অংশক $\log 1{\cdot}25 = 0{\cdot}09691$। (পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট লগ তালিকা থেকে)।

সুতরাং $\log 125 = 2 + 0{\cdot}09691 = 2{\cdot}09691$. আবার $0{\cdot}00293 = 2{\cdot}93 \times 10^{-3}$

সুতরাং log 0·00293 এর পূর্ণক = –3 এবং অংশক $\log 2{\cdot}93 = 0{\cdot}46687$ (লগ তালিকা থেকে)।

সুতরাং $\log 0{\cdot}00293 = -3 + 0{\cdot}46687 = 7{\cdot}46687 - 10$

প্রতিলগ **(Antilogarithm)**

যদি $\log a = n$ হয়, তবে a কে n এর প্রতিলগ বলা হয়। অর্থাৎ, $\log a = n$ হলে $a = \text{antilog } n$.

উদাহরণ ৫। antilog 2·87679 = 753, antilog (9·82672 – 10) = 0·671 এবং antilog (6·74429 –10) = 0·000555.

দ্রষ্টব্য। বৈজ্ঞানিক ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে $\log a$ এর আসন্ন মান নির্ণয় করা যায় (মাধ্যমিক ব্যবহারিক গণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য।)

স্বাভাবিক লগারিদম

স্বাভাবিক লগারিদমের বিস্তারিত আলোচনা এই পুস্তকের আওতা বহির্ভূত। আমরা শুধু এটুকু লক্ষ করি যে,

$\log a = \dfrac{\log_{10} a}{\log_{10} e}$ [(ট) থেকে] অর্থাৎ, $\ln a = \dfrac{\log_{10} a}{\log_{10} e}$

এখন $\dfrac{1}{\log e}$ এর আসন্ন মান $2{\cdot}302585$ নির্ণয় করে উপরের সূত্র থেকে দেখা যায় যে,

$\ln a \approx 2{\cdot}302585 \times \log a$

a এর সাধারণ লগ নির্ণয় করে এই সূত্রের সাহায্যে a এর স্বাভাবিক লগ নির্ণয় করা যায়। তবে সরাসরি ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে $\ln a$ এর মান নির্ণয় করাই সুবিধাজনক (মাধ্যমিক ব্যবহারিক গণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য)।

অনুশীলনী ৪·৩

১। দেখাও যে :

(ক) $\log_k\left(\dfrac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\dfrac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\dfrac{c^n}{a^n}\right) = 0$

(খ) $\log_k(ab)\log_k\left(\dfrac{a}{b}\right) + \log_k(bc)\log_k\left(\dfrac{b}{c}\right) + \log_k(ca)\log_k\left(\dfrac{c}{a}\right) = 0$

(গ) $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$ (ঘ) $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right) = b.$

২। (ক) যদি $\dfrac{\log_k a}{b-c} = \dfrac{\log_k b}{c-a} = \dfrac{\log_k c}{a-b}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a b^b c^c = 1.$

(খ) যদি $\dfrac{\log_k a}{y-z} = \dfrac{\log_k b}{z-x} = \dfrac{\log_k c}{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে,

(১) $a^{y+z} b^{z+x} c^{x+y} = 1.$

(২) $a^{y^2+yz+z^2} . b^{z^2+zx+x^2} . z^{x^2+xy+y^2} = 1$

(গ) যদি $\dfrac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$ হয়, তবে দেখাও যে, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(ঘ) দেখাও যে, $\log_k \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 2\log_k (x-\sqrt{x^2-1})$

(ঙ) যদি $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x \log_k(b/a) = \log_k a$.

(চ) যদি $xy^{a-1} = p$, $xy^{b-1} = q$, $xy^{c-1} = r$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$(b-c)\log_k p + (c-a)\log_k q + (a-b)\log_k r = 0$$

(ছ) যদি $\dfrac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \dfrac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \dfrac{ca\log_k(ca)}{c+a}$ হয়, তবে দেখাও $a^a = b^b = c^c$.

(জ) যদি $\dfrac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \dfrac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \dfrac{z(x+y-z)}{\log_k z}$ হয়,

তবে দেখাও যে, $x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$.

৩। লগসারণী (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য) ব্যবহার করে P এর আসন্ন মান নির্ণয় কর যেখানে

(ক) $P = (0{\cdot}087721)^4$ (খ) $P = \sqrt[3]{30.00618}$ (গ) $P = \dfrac{3407 \times 24.32}{54.74 \times 1.75}$

(ঘ) $P = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ যেখানে $\pi \approx 3{\cdot}1416$, $g = 981$ এবং $l = 25{\cdot}5$

(ঙ) $P = 10000 \times e^{005t}$, যেখানে $e \approx 2{\cdot}718$ এবং $t = 13{\cdot}86$

৪। $\ln P \approx 2{\cdot}3026 \times \log P$ সূত্র ব্যবহার করে $\ln P$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর

যখন (ক) $P = 10000$ (খ) $P = {\cdot}001e^2$ (গ) $P = 10^{100} \times \sqrt{e}$

বহুনির্বাচনী ও সৃজনশীল প্রশ্নাবলী

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}}\right\}^{\frac{a}{a-b}}$ এর সরল মান নিচের কোনটি ?

ক. 0 খ. 1
গ. a ঘ. x

২। যদি a, b, p > 0 এবং $a \neq 1, b \neq 1$ হয়
i. $\log_a p = \log_b p \times \log_a b$
ii. $\log_a \sqrt{a} \times \log_{\sqrt{b}} b \times \log_c \sqrt{c}$ এর মান 2
iii. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?
ক. i ও ii
খ. ii ও iii
গ. i ও iii
ঘ. i, ii ও iii

$x, y, z \neq 0$, এবং $a^x = b^y = c^z$ হলে, ৩-৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৩। কোনটি সঠিক ?

ক. $a = b^{\frac{y}{z}}$ খ. $a = c^{\frac{z}{y}}$

গ. $a = c^{\frac{z}{x}}$ ঘ. $a \neq \frac{b^2}{c}$

৪। নিচের কোনটি ac এর সমান।

ক. $b^{\frac{y}{x}} . b^{\frac{y}{z}}$ খ. $b^{\frac{y}{x}} . b^{\frac{z}{y}}$

গ. $b^{\frac{x}{y}+\frac{z}{y}}$ ঘ. $b^{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}$

৫। $b^2 = ac$ হলে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ খ. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$

গ. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{x}$ ঘ. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{z}{2}$

সৃজনশীল প্রশ্নাবলী
(তৃতীয় ও চতুর্থ অধ্যায়)

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। $x = log_a y$ যেখানে $a > 0, a \neq 1$

ক. $\left\{(2^{\frac{1}{x}})^{\frac{x^2-y^2}{x+y}}\right\}^{\frac{x}{x-y}}$ এর মান কত?

খ. $y = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ হলে, দেখাও যে, $2y^3 - 6y - 5 = 0$

গ. x এর কোন মানের জন্য $\frac{\log_{10}(1+x)}{\log_{10}x} = 2$

২। $p, q, r \in R$ এবং $a, b, c \in N$

ক. R এবং N কে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

খ. যদি $a < b$ হয় তবে N এর মৌলিক স্বীকার্য ব্যাবহার করে দেখাও যে, $(a + c) < (b + c)$

গ. দেখাও যে, $pqr = 1$ [যখন $a^p = b, b^q = c$ এবং $c^r = a$]

এবং $p^{\frac{1}{x}} = q^{\frac{1}{y}} = r^{\frac{1}{z}}$ এর জন্য প্রমাণ কর যে, $(x + y + z) = 0$

৩। $a, b, c \in R$; যেখানে $b = (1+3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}})$ এবং $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b}$

ক. দেখাও যে, $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right) = b$

খ. দেখাও যে, $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$

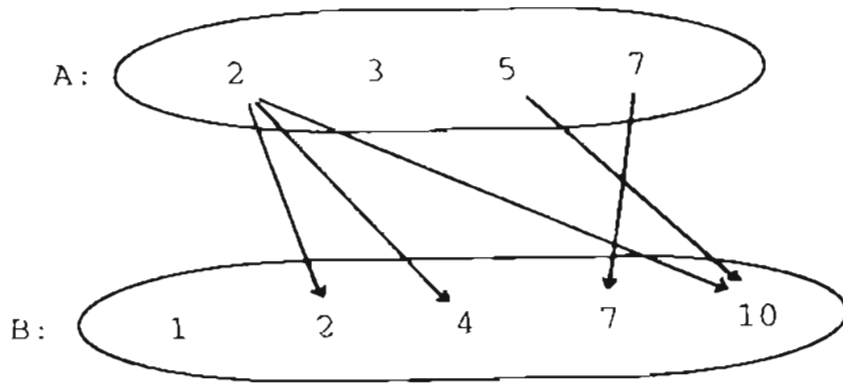
গ. $a^a b^b c^c$ এর মান বের কর।

পঞ্চম অধ্যায়

অন্বয় ও ফাংশন

৫.১। অন্বয়

উদাহরণ ১। মনে করি, $A = \{ 2, 3, 5, 7\}$ এবং $B = \{ 1, 2, 4, 7, 10\}$

A এর যে যে সদস্য দ্বারা B এর যে যে সদস্য বিভাজ্য হয় তাদের অন্বিত করে নিচের চিত্রে দেখানো হল :

এরূপ অন্বিত সদস্যদের দ্বারা গঠিত ক্রমজোড়গুলোর সেট $D = \{(2, 2), (2, 4), (2, 10), (5, 10), (7, 7)\}$ দ্বারা এই বিভাজ্যতা সম্পর্কটি বর্ণনা করা যায়। D সেটে অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম পদ A এর সদস্য ও দ্বিতীয় পদ B এর সদস্য যেখানে প্রথম পদ দ্বারা দ্বিতীয় পদ বিভাজ্য। অর্থাৎ, $D \subset A \times B$ এবং $D = \{(x,y) :$ $x \in A, y \in B$ এবং x দ্বারা y বিভাজ্য$\}$। এখানে D সেটটি A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয়।

উদাহরণ ২। বাস্তব সংখ্যা ক্রমজোড়ের সেট $L = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ এবং $x < y\}$ বিবেচনা করি। লক্ষ করি যে, দুইটি বাস্তব সংখ্যা a, b র জন্য $a < b$ যদি ও কেবল যদি $(a, b) \in \mathbf{L}$ হয়। সুতরাং L সেট দ্বারা বাস্তব সংখ্যার ছোট বড় সম্পর্ক বর্ণিত হয়।

সংজ্ঞা। A ও B সেট হলে $A \times B$ এর কোনো অশূন্য উপসেটকে A থেকে B এ একটি অন্বয় (relation) বলা হয়।

সংজ্ঞা। A একটি সেট হলে $A \times A$ এর কোনো অশূন্য উপসেটকে A –এ একটি অন্বয় বলা হয়।

উদাহরণ ১ এ বর্ণিত D সেটটি উক্ত উদাহরণে উল্লিখিত A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয়। উদাহরণ ২ এ বর্ণিত L সেটটি বাস্তব সংখ্যা সেট Rএ একটি অন্বয়।

মন্তব্য । প্রত্যেক অন্বয় এক বা একাধিক ক্রমজোড়ের একটি সেট।

সংজ্ঞা। মনে করি, A সেট থেকে B সেটে S একটি অন্বয়, অর্থাৎ, $S \subset A \times B$. S এ অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে S এর ডোমেন (domain) এবং দ্বিতীয় উপাদনসমূহের সেটকে S এর রেঞ্জ (range) বলা হয়। S এর ডোমেনকে ডোম S এবং রেঞ্জকে রেঞ্জ S লিখে প্রকাশ করা হয়।

মন্তব্য । A সেট থেকে B সেটে কোন অন্বয় S এর ডোম $S \subset A$, রেঞ্জ $S \subset B$ এবং

ডোম $S = \{ x \in A :$ কোনো $y \in B$ এর জন্য $(x, y) \in S\}$, রেঞ্জ $S = \{ y \in B :$ কোনো $x \in A$ এর জন্য (x,

$y) \in S\}$.

উদাহরণ ৩। উদাহরণ ১ এ বর্ণিত

অন্বয় $D = \{(2, 2), (2, 4), (2, 10), (5, 10), (7, 7)\}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : D এর সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলোর সেট $\{2, 5, 7\}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলোর সেট $\{2, 4, 7, 10\}$, $\therefore$ ডোম $D = \{2, 5, 7\}$ এবং রেঞ্জ $D = \{2, 4, 7, 10\}$

উদাহরণ ৪। যদি $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ হয়, তবে

A সেটে অন্বয় $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$ কে তালিকা প্রকাশ পদ্ধতিতে বর্ণনা কর এবং S এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = x^2$ এর মান নির্ণয় করি :

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

যেহেতু $4 \notin A$ সেহেতু $(-2, 4) \notin S$, $(2, 4) \notin S$

$\therefore S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\} = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

সুতরাং S এর ডোমেন, ডোম $S = \{-1, 0, 1\}$এবং S এর রেঞ্জ, রেঞ্জ $S=\{0, 1\}$

উদাহরণ ৫।

$L = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ এবং $x < y\}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x \in$ ডোম L যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbf{R}$ এবং কোনো $y \in \mathbf{R}$ এর জন্য $x < y$.

যেহেতু $x \in R$ হলে $x + 1 \in \mathbf{R}$ এবং $x < x + 1$, সেহেতু প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা $x \in$ ডোম L.

$\therefore$ ডোম $L = \mathbf{R}$

আবার, $y \in$ রেঞ্জ L যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbf{R}$ এবং কোনো $x \in \mathbf{R}$ এর জন্য $x < y$. যেহেতু $y \in \mathbf{R}$ হলে $y - 1 \in \mathbf{R}$ এবং $y - 1 < y$, সেহেতু বাস্তব সংখ্যা $y \in$ রেঞ্জ L $\therefore$ রেঞ্জ $L = \mathbf{R}$

দ্রষ্টব্য ১। উদাহরণ ৪ এর অন্বয়টি "$x \in A, y\in A$ এবং $y = x^2$" খোলাবাক্য এবং উদাহরণ ৫ এর অন্বয়টি "$x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ এবং $x < y$" খোলাবাক্য দ্বারা বর্ণিত হয়েছে। এরূপ খোলাবাক্যের দ্বারা অন্বয়ের বর্ণনায় দুইটি চলক x ও y থাকে। যে ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান দ্বারা x এবং দ্বিতীয় উপাদান দ্বারা y প্রতিস্থাপিত হলে বাক্যটি একটি সত্য উক্তিতে পরিণত হয়, সেই ক্রমজোড়গুলোই উক্ত অন্বয়ের সদস্য হয়।

দ্রষ্টব্য ২। সাধারণত $\mathbf{R}$ কে সার্বিক সেট ধরে $\mathbf{R}$ এ কোনো অন্বয়ের বর্ণনায় $x \in \mathbf{R}$ এবং $y \in \mathbf{R}$ শর্ত অনুল্লেখ রাখা হয়। এ প্রসঙ্গে প্রচলিত রীতি এই যে, অন্যভাবে সীমিত করা না হলে $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ এর যে সকল ক্রমজোড় প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে তারাই এরূপ অন্বয়ের অন্তর্ভুক্ত।

উদাহরণ ৬। $\mathbf{R}$ এ $S = \{(x, y) : y = \sqrt{x}\}$ অন্বয়ের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(x, y) \in S$ হলে $y = \sqrt{x}$, শর্তানুযায়ী $x \geq 0$ হতে হবে এবং তখন $y \geq 0$ হবে। কেননা $\sqrt{x}$ দ্বারা x এর বর্গমূল বোঝায়। অর্থাৎ, $S \subseteq \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ যেখানে $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$

এখন $x \in \mathbf{R}_+$ অর্থাৎ, $x \geq 0$ হলে $\sqrt{x} \in \mathbf{R}_+$ এবং $(x, \sqrt{x}) \in S$। সুতরাং ডোম $S = \mathbf{R}_+$

আবার $y \in \mathbf{R}_+$ অর্থাৎ, $y \geq 0$ হলে $y^2 \in \mathbf{R}_+$, $\sqrt{y^2} = y$ এবং $(y^2, y) \in S$ । সুতরাং রেঞ্জ $S = \mathbf{R}_+$

মন্তব্য। $\mathbf{R}_+$ দ্বারা সবসময় সকল অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$ নির্দেশ করব।

৫.২। বিপরীত অন্বয়

(a, b) ক্রমজোড়ের প্রথম ও দ্বিতীয় উপাদানের স্থান পরিবর্তন করা হলে (b, a) ক্রমজোড় পাওয়া যায়। কোনো অন্বয়ের সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম ও দ্বিতীয় উপাদানের স্থান পরিবর্তন করা হলে আর একটি অন্বয় পাওয়া যায়। এই শেষোক্ত অন্বয়কে প্রথমোক্ত অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় বলা হয়।

সংজ্ঞা। S কোনো অন্বয় হলে S এর বিপরীত অন্বয় হচ্ছে $S^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in S\}$

মন্তব্য ১। S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়কে S^{-1} প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। S যদি A সেট থেকে B সেটে কোনো অন্বয় হয়, তবে S^{-1} হবে B সেট থেকে A সেটে একটি অন্বয়। A সেটে কোনো অন্বয় S এর বিপরীত অন্বয়ও A সেটে একটি অন্বয়।

মন্তব্য ২। S অন্বয়ের ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে A ও B হলে, বিপরীত অন্বয় S^{-1} এর ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে B ও A হবে, অর্থাৎ, ডোম S^{-1} = রেঞ্জ S এবং রেঞ্জ S^{-1}= ডোম S.

মন্তব্য ৩। S কোন অন্বয় হলে S^{-1} এর বিপরীত অন্বয় S নিজেই। অর্থাৎ, $(S^{-1})^{-1} = S$

উদাহরণ ১। $S = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$.

অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় $S^{-1} = \{(2, 1), (4 ,2), (6, 3), (8, 4)\}$.

এখানে ডোম $S = \{1, 2, 3, 4\}$= রেঞ্জ S^{-1}এবং রেঞ্জ $S = \{2, 4, 6, 8\}$= ডোম S^{-1}

উদাহরণ ২। $\mathbf{R}$ সেটে $S = \{(x, y) : y^2 = x\}$ অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় নির্ণয় কর।

সমাধান : S এর বর্ণনায় x স্থলে y এবং y স্থলে x লিখে পাই, $S = \{(y, x) : x^2 = y\}$

সুতরাং $S^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in S\} = \{(x, y) : x^2 = y\} = \{(x, y) : y = x^2\}$.

৫.৩ ফাংশন

ফাংশন বিশেষ ধরনের অন্বয়।

সংজ্ঞা। যদি কোনো অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকে, তবে ঐ অন্বয়কে ফাংশন বলা হয়।

সংজ্ঞা। যদি F একটি ফাংশন হয় এবং ডোম F = A ও রেঞ্জ $F \subset B$ হয়, তবে F কে A থেকে B এ বর্ণিত ফাংশন বলা হয় এবং $F : A \rightarrow B$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

মন্তব্য। $F : A \rightarrow B$ লিখলে বুঝতে হবে যে F একটি ফাংশন যার ডোমেন A এবং যার রেঞ্জ B এর উপসেট।

উদাহরণ ১। $F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ অন্বয়টি একটি ফাংশন। এর সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান ভিন্ন ভিন্ন।

উদাহরণ ২। $\mathbf{R}$ সেটে $S = \{(x, y) : y^2 = x\}$ অন্বয়টি ফাংশন নয়। এখানে ডোম $S = \mathbf{R}_+$ এবং

রেঞ্জ $S = \mathbf{R}$ (পূর্ব অনুচ্ছেদের উদাহরণ ২ দ্রষ্টব্য)

এখন $x = 1$ নিলে $y^2 = x$ শর্তানুযায়ী $y^2 = 1$ বা, $y = \pm 1$ হয়।

অর্থাৎ, $(1, 1) \in S$ এবং $(1, -1) \in S$, সুতরাং, S ফাংশন নয়।

দ্রষ্টব্য ১। প্রত্যেক ফাংশন একটি অন্বয়। প্রত্যেক অন্বয় ফাংশন নাও হতে পারে। ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ হবে অন্বয় এর ডোমেন ও রেঞ্জ।

দ্রষ্টব্য ২। ফাংশনের সংজ্ঞা থেকে দেখা যায় যে, কোনো অন্বয় F ফাংশন হবে যদি ও কেবল যদি $(x, y) \in F$ এবং $(x, y') \in F$ হলে $y = y'$ হয়। সুতরাং F ফাংশন হলে F এর ডোমেনের প্রত্যেক সদস্য x এর সঙ্গে F এর রেঞ্জের একটি অনন্য সদস্য y অন্বিত থাকে যেন $(x, y) \in F$ হয়।

সংজ্ঞা। যদি F ফাংশন হয় এবং $(x, y) \in F$ হয় তবে y কে F এর অধীনে x এর ছবি (image) বলা হয় এবং $y = F(x)$ লেখা হয়।

উদাহরণ ৩। উদাহরণ ১ এ বর্ণিত ফাংশনের ক্ষেত্রে,

$F(-2) = 4, F(-1) = 1, F(0) = 0, F(1) = 1, F(2) = 4.$

এই ফাংশনের ডোমেন $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $B = \{0, 1, 4\}$

A এর বিভিন্ন সদস্যের ছবি লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে, এখানে $x \in A$ এর জন্য $F(x) = x^2$. এ ফাংশনটিকে $F : A \to B, F(x) = x^2$ লিখে প্রকাশ করা যায়।

মন্তব্য। কোনো ফাংশন F এর ডোমেন এবং ডোমেনের প্রত্যেক সদস্য x এর অনন্য ছবি F(x) নির্দিষ্ট করা হলেই ফাংশনটি নির্ধারিত হয়। অনেক সময় ডোমেন উহ্য রাখা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে ডোমেন হিসেবে **R** এর ঐ উপসেটকে গ্রহণ করা হয় যার প্রত্যেক সদস্য x এর জন্য **R** এ F(x) নির্ধারিত থাকে।

উদাহরণ ৪। $F(x) = \sqrt{1-x}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। $F(-3), F(0), F(\frac{1}{2}), F(1), F(2)$ এর মধ্যে যেগুলো সংজ্ঞায়িত সেগুলো নির্ণয় কর।

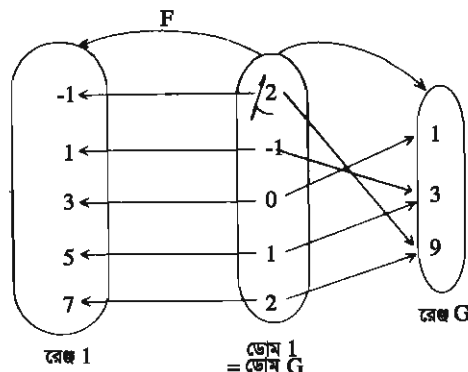
সমাধান : $F(x) = \sqrt{1-x} \in R$ যদি ও কেবল যদি $1 - x \geq 0$ বা $1 \geq x$ অর্থাৎ, $x \leq 1$ হয়। সুতরাং ডোম F = $\{x \in R : x \leq 1\}$ এখানে $F(-3) = \sqrt{1-(-3)} = 4 = 2$; $F(0) = \sqrt{1} = 1.$

$$F(\frac{1}{2}) = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ F(1) = \sqrt{1-1} = 0$$

F(2) সংজ্ঞায়িত নয়, কেননা $2 \notin$ ডোম F.

৫.৪। এক-এক ফাংশন

$F = \{(-2, -1), (-1, 1), (0, 3), (1, 5), (2, 7)\}$ এবং $G = \{(-2, 9), (-1, 3), (0, 1), (1, 3), (2, 9)\}$ অন্বয় দুইটি উভয়ই ফাংশন (এদের কোনোটিতেই একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় নেই)।

লক্ষণীয় যে,

F ফাংশনের অধীনে ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ছবি সর্বদা ভিন্ন। কিন্তু G ফাংশনের অধীনে ডোমেনের দুইটি ভিন্ন সদস্যের ছবি একই $G(-1) = G(1) = 3$, $G(-2) = G(2) = 9$.

সংজ্ঞা। যদি কোনো ফাংশনের অধীনে তার ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ছবি সর্বদা ভিন্ন হয়, তবে ফাংশনটিকে এক–এক (One–one) ফাংশন বলা হয়।

উপরে বর্ণিত F ফাংশনটি এক–এক ফাংশন, G ফাংশনটি এক–এক নয়।

দ্রষ্টব্য ১। উপরের সংজ্ঞা থেকে দেখা যায় যে, F একটি এক–এক ফাংশন হয় যদি ও কেবল যদি ডোম F এর যে কোনো সদস্য x_1, x_2 এর জন্য $x_1 \neq x_2$ হলে $F(x_1) \neq F(x_2)$ হয়, অর্থাৎ, $F(x_1) = F(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়।

উদাহরণ ১। দেখাও যে,

$F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = ax + b$ অন্বয়টি এক–এক ফাংশন, যেখানে a, b ধ্রুবক এবং $a \neq 0$.

সমাধান : যে কোনো $x_1 \in \mathbf{R}$, $x_2 \in \mathbf{R}$ এর জন্য $F(x_1) = F(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি

$ax_1 + b = ax_2 + b$ বা, $ax_1 = ax_2$ বা, $x_1 = x_2$ হয়

$\therefore F$ এক–এক ফাংশন।

উদাহরণ ২। দেখাও যে, $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = x^2$ ফাংশনটি এক–এক নয়।

সমাধান ঃ এখানে ডোম $F = \mathbf{R}$. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ নিয়ে দেখি যে,

$x_1 \in$ ডোম F, $x_2 \in$ ডোম F, $x_1 \neq x_2$,

কিন্তু $F(x_1) = F(-1) = (-1)^2 = 1$, $F(x_2) = F(1) = (1)^2 = 1$

অর্থাৎ, $F(x_1) = F(x_2)$, $\therefore$ F এক–এক নয়।

দ্রষ্টব্য ২। কোন ফাংশনের বিপরীত অন্বয় ফাংশন নাও হতে পারে। যেমন,

$G = \{(1, 4), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 4)\}$ একটি ফাংশন, কিন্তু $G^{-1} = \{(4, 1), (1, 2), (0, 3), (1, 4), (4, 5)\}$ ফাংশন নয়। এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে, কোন ফাংশন এক–এক হলে তার বিপরীত অন্বয় অবশ্যই একটি ফাংশন। কারণ, F এক এক ফাংশন হলে F এ একই দ্বিতীয় উপাদান বিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় নেই, সুতরাং F^{-1} এ একই উপাদান বিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় থাকবে না।

অনুশীলনী ৫.১

১। প্রদত্ত S অন্বয়ের ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত অন্বয় নির্ণয় কর এবং S অথবা S^{-1} ফাংশন কিনা তা নির্ধারণ কর :

(ক) $S=\{(1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)\}$

(খ) $S=\{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)(3, 8)\}$

(গ) $S=\{(\frac{1}{2}, 0), (1, 1), (1, -1), (\frac{5}{2}, 2), (\frac{5}{2}, -2)\}$

(ঘ) $S=\{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$

(ঙ) $S=\{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

২। প্রদত্ত S অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা কর এবং ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয় কর,

যেখানে $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(ক) $S = \{(x, y), ঃ x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$

(খ) $S = \{(x, y), ঃ x \in A, y \in A$ এবং $x - y = 1\}$

(গ) $S = \{(x, y), ঃ x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$

(ঘ) $S = \{(x, y), ঃ x \in A, y \in A$ এবং $y^2 = x\}$

৩। ২নং প্রশ্নে বর্ণিত অন্বয়গুলোর মধ্যে কোনগুলো ফাংশন তা নির্ধারণ কর।

৪। ১নং ও ২নং প্রশ্নে বর্ণিত অন্বয়গুলোর মধ্যে যেগুলো ফাংশন সেগুলো এক-এক কি না তা নির্ধারণ কর।

৫। প্রদত্ত $F(x)$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর এবং ফাংশনটি এক-এক কি না তা নির্ধারণ কর :

(ক) $F(x) = 2x - 1$ (খ) $F(x) = (x - 1)^2$ (গ) $F(x) = \sqrt{x - 1}$

(ঘ) $F(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ (ঙ) $F(x) = |x|$ (চ) $F(x) = e^x$

(ছ) $F(x) = 1nx$

৬। $F(x) = 2x - 1$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

(ক) $F(-2), F(0)$ এবং $F(2)$ নির্ণয় কর। (খ) $F(\dfrac{a + 1}{2})$ নির্ণয় কর, যেখানে $a \in \mathbf{R}$.

(গ) $F(x) = 5$ হলে x নির্ণয় কর। (ঘ) $F(x) = y$ হলে, x নির্ণয় কর যেখানে $y \in \mathbf{R}$

৭। $F(x) = (x-1)^2$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

(ক) $F(-5), F(-1), F(0), F(1)$ এবং $F(5)$ নির্ণয় কর।

(খ) $F(x) = 100$ হলে, x নির্ণয় কর।

(গ) $F(x) = 0$ হলে, x নির্ণয় কর।

(ঘ) $F(x) = y$ হলে, x নির্ণয় কর, যেখানে $y > 0$.

৮। $F(x) = \sqrt{x - 1}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

(ক) $F(1), F(5)$ এবং $F(10)$ নির্ণয় কর। (খ) $F(a^2 + 1)$ নির্ণয় কর যেখানে $a \in \mathbf{R}$.

(গ) $F(x) = 5$ হলে, x নির্ণয় কর। (ঘ) $F(x) = y$ হলে, x নির্ণয় কর যেখানে $y \geq 0$.

৯। $F(x) = |x|$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

(ক) $F(-3), F(-1), F(0), F(1)$ এবং $F(3)$ নির্ণয় কর।

(খ) $F(x) = 4$ হলে, x নির্ণয় কর।

(গ) $F(x) = 0$ হলে, x নির্ণয় কর।

(ঘ) $F(x) = y$ হলে, x নির্ণয় কর, যেখানে $y>0$

১০। $F ঃ \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+, F(x) = x^2$ ফাংশনের জন্য

(ক) ডোম F এবং রেঞ্জ F নির্ণয় কর। (খ) দেখাও যে, F এক-এক ফাংশন।

(গ) F^{-1} নির্ণয় কর। (ঘ) দেখাও যে, F^{-1} একটি ফাংশন।

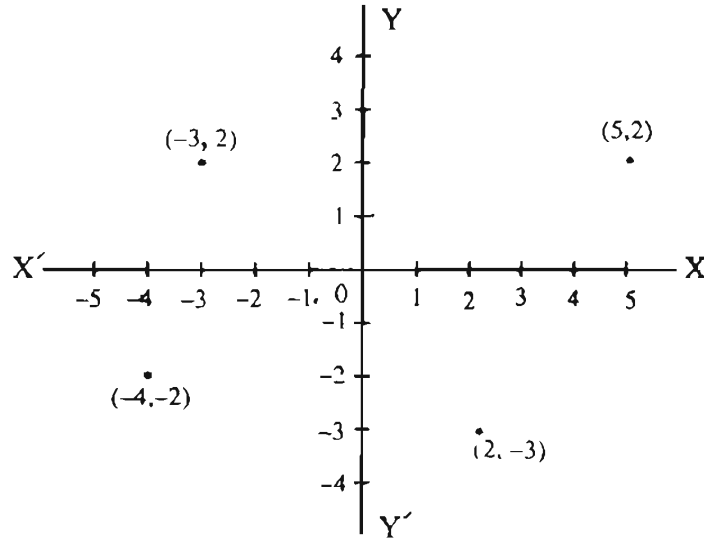
৫.৫। অন্বয়ের লেখচিত্র (Graph of a Relation)

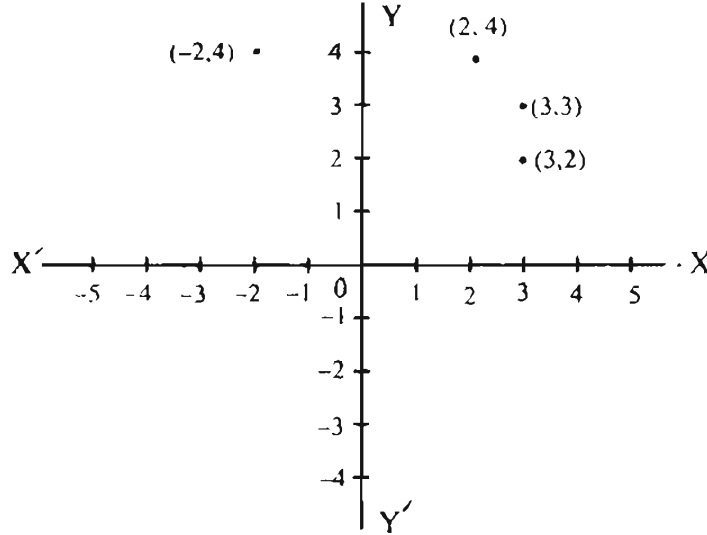
ছক-কাগজে দুইট পরস্পর লম্ব সংখ্যারেখাকে অক্ষরেখা ধরে বাস্তব সংখ্যার যে কোনো ক্রমজোড় (x, y) এর প্রতিরূপী বিন্দু পাতন করা যায় (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য)। $\mathbf{R}$ এ বর্ণিত কোনো অন্বয় S এরূপ (x, y) ক্রমজোড়ের সেট হওয়ায় স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজে S এর সদস্য সকল ক্রমজোড়ের প্রতিরূপী বিন্দু পাতন করে S এর চিত্ররূপ বর্ণনা করা যায়। এই চিত্ররূপই S এর লেখচিত্র (graph)।

সান্ত অন্বয়ের লেখচিত্র

S যদি $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ এর সান্ত উপসেট হয়, তবে S এর লেখ কতকগুলো বিচ্ছিন্ন বিন্দুর সেট।

ছক কাগজে x অক্ষ ও y অক্ষ এঁকে সুবিধামত একক নিয়ে বিন্দুগুলো পাতন করলেই লেখচিত্র অঙ্কিত হয়। (বর্ণনার জন্য মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য)।

উদাহরণ ১। $S = \{(2, -3), (5, 2), (-3, 2), (-4, -2)\}$ অন্বয়ের লেখচিত্র নিম্নে দেখান হল :

মন্তব্য। লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, y অক্ষের সমান্তরাল কোনো রেখায় লেখচিত্রের একাধিক বিন্দু অবস্থিত নয়, অর্থাৎ, S এর কোনো দুইটি সদস্যেরই একই প্রথম উপাদান নেই। সুতরাং S একটি ফাংশন। $(0, 2)$ বিন্দুগামী x অক্ষের সমান্তরাল রেখায় লেখের দুইটি বিন্দু অবস্থিত, অর্থাৎ, S এর দুইটি সদস্যের দ্বিতীয় উপাদান 2। সুতরাং ফাংশনটি এক-এক নয়। এভাবে লেখচিত্র দেখে কোনো অন্বয় ফাংশন কি না এবং ফাংশন হলে এক-এক ফাংশন কি না বোঝা যায়।

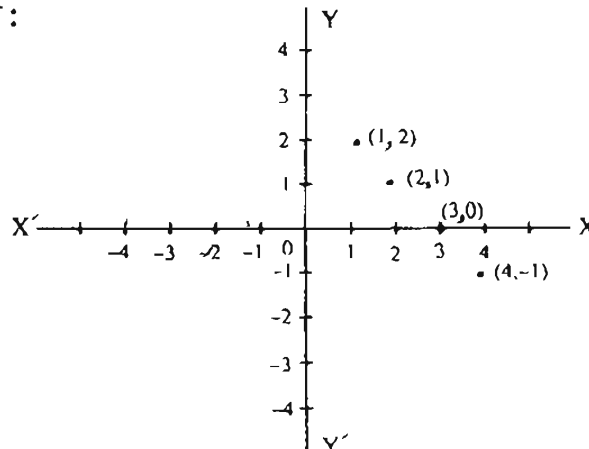
উদাহরণ ২। $S = \{(3, 2), (2, 4), (3, 3), (-2, 4)\}$ এর লেখচিত্র নিম্নে দেখানো হল :

মন্তব্য। লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, (3, 0) বিন্দুগামী y অক্ষের সমান্তরাল রেখায় লেখচিত্রের দুইটি বিন্দু অবস্থিত, অর্থাৎ, S এর দুইটি সদস্যের প্রথম উপাদান 3। সুতরাং S ফাংশন নয়।

উদাহরণ ৩। মনে করি, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $S = \{(x, y), : x \in A$ এবং $x + y = 3$.

এখানে S এর বর্ণনাকারী সমীকরণ : $x + y = 3$ বা, $y = 3 - x$ থেকে x ও y এর নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায় :

x	1	2	3	4
y	2	1	0	−1

$\therefore S = \{(1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, -1)\}$

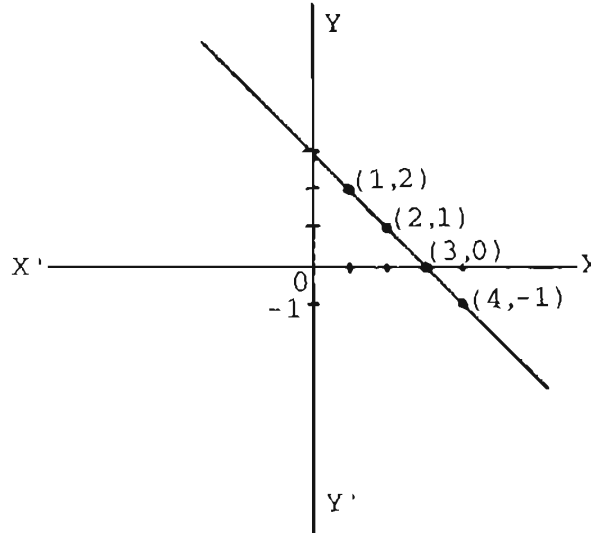
S এর লেখ নিম্নে দেখানো হল :

সরল রৈখিক লেখচিত্র (Linear graph)

উল্লেখ্য যে, a, b ও c ধ্রুবক এবং a ও b উভয়ই শূন্য না হলে **R** এ

$L = \{(x, y) : ax + by + c = 0\}$

অন্বয়ের লেখচিত্র একটি সরলরেখা (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য)। এরূপ লেখ অঙ্কনের জন্য L এর বর্ণনাকারী সমীকরণে x বা y এর কয়েকটি সুবিধাজনক মান বসিয়ে y বা x এর সংশ্লিষ্ট মান নির্ণয় করে L এর কয়েকটি সদস্য ক্রমজোড় নির্দিষ্ট করা হয়। অতঃপর রুলার ধরে বিন্দুগুলো যে সরলরেখায় অবস্থিত তা অঙ্কন করে লেখচিত্র পাওয়া যায়। জ্যামিতি থেকে আমরা জানি যে দুইটি বিন্দু দ্বারা একটি সরলরেখা নির্দিষ্ট হয়। সুতরাং সরল রৈখিক লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য দুইটি বিন্দু পাতনই যথেষ্ট। তবে সম্ভাব্য ভুল পরিহারের জন্য সাধারণত দুই এর অধিক বিন্দু পাতন করা হয়ে থাকে।

উদাহরণ ৪। $L = \{(x, y) : x + y = 3\}$ অন্বয়ের লেখ অঙ্কনের জন্য উদাহরণ ৩ এর অনুরূপ ছক তৈরি করে দেখি যে,

$S = \{(1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, -1)\} \subset L$. এখন S এর লেখ অঙ্কন করে বিন্দুগুলোর সংযোজক রেখা আঁকলেই L এর লেখ পাওয়া যাবে।

বৃত্ত লেখচিত্র

উল্লেখ্য যে, p, q ও r ধ্রুবক এবং $r \neq 0$ হলে **R** এ

$S = \{x, y) : (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2\}$

অন্বয়ের লেখ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র (p, q) এবং ব্যাসার্ধ r (মাধ্যমিক বীজগণিত পস্তক দ্রষ্টব্য)।

ছক কাগজে (p, q) বিন্দু পাতন করে ঐ বিন্দুকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করে লেখচিত্রটি পাওয়া যায়।

মন্তব্য। যে অন্বয়ের সমাধান সেট অসীম, তার লেখচিত্র অঙ্কনের স্বীকৃত পদ্ধতি হল যথেষ্ট সংখ্যক সমাধানের প্রতিরূপী বিন্দু ছক কাগজে পাতন করে সাবলীলভাবে (free hand) ঐ সব বিন্দু যোগ করা, যাতে অন্বয়টির লেখচিত্রের ধরন দ্ব্যর্থহীনভাবে বোঝা যায়।

কিন্তু যে অন্বয়ের লেখচিত্র বৃত্ত, তার জন্য কম্পাস ব্যবহার করলে কাজ সহজ ও সুন্দর হয় বিধায় শেষোক্ত পন্থা অবলম্বন করা হল।

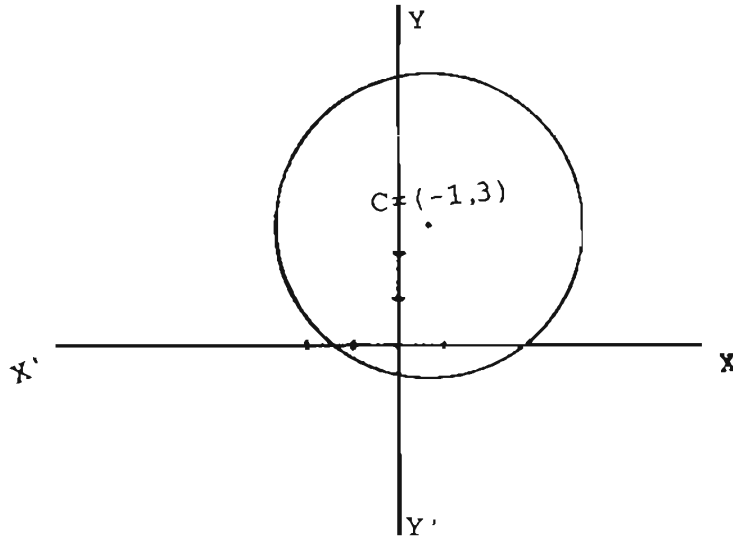
উদাহরণ ৫। $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0\}$

অন্বয়ের বর্ণনাকারী সমীকরণ : $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$

$$\text{বা, } (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 1 + 9 + 6$$

$$\text{বা, } (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16 = 4^2$$

সুতরাং S এর লেখচিত্র একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $C(-1, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r = 4$

S এর লেখচিত্র নিম্নে দেখানো হল :

পরাবৃত্ত লেখচিত্র

$a > 0$ হলে $S = \{(x, y) : y = ax^2\}$ ....(1)

আকারের অন্বয়ের লেখ অঙ্কনের জন্য $y = ax^2$ সমীকরণটি বিবেচনা করে দেখা যায় যে,

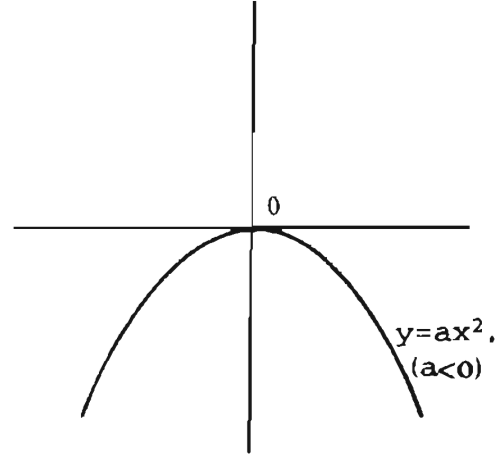
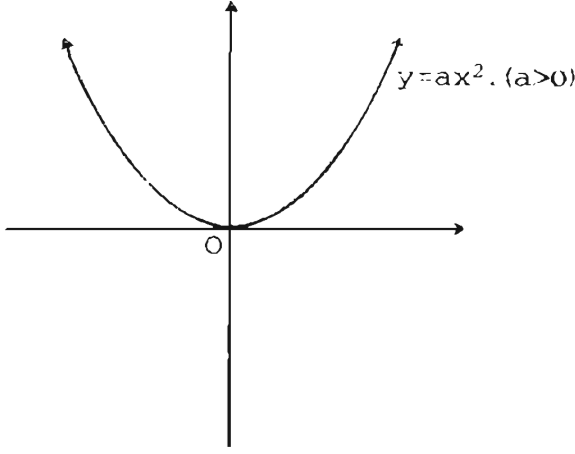
(ক) $(0, 0) \in S$; সুতরাং লেখচিত্র মূলবিন্দু দিয়ে যাবে।

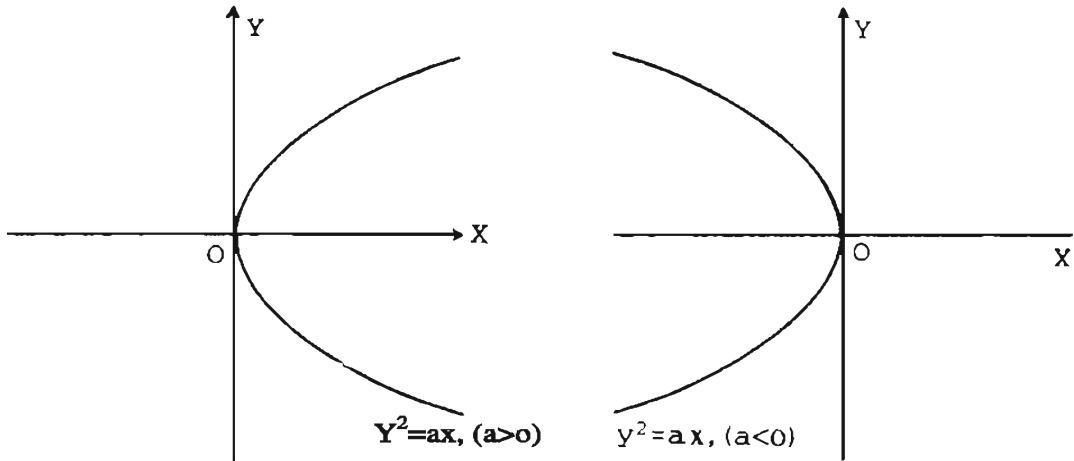
(খ) যে কোনো x এর জন্য $y \geq 0$; সুতরাং লেখচিত্র সম্পূর্ণভাবে x অক্ষের উর্ধ্ব–অর্ধতলে থাকবে।

(গ) প্রত্যেক ধনাত্মক y এর জন্য সমীকরণটি থেকে x এর দুইটি সংশ্লিষ্ট মান $x = \pm\sqrt{\frac{y}{a}}$ পাওয়া যায়।

সুতরাং যে কোনো $y > 0$ এর জন্য $(\sqrt{\frac{y}{a}}, y)$ ও $(-\sqrt{\frac{y}{a}}, y)$ উভয়ই S এর সদস্য। এদের প্রতিরূপী বিন্দু দুইটি y অক্ষের দুই পাশে y অক্ষ থেকে সমদুরে অবস্থিত। ফলে y অক্ষ সাপেক্ষে লেখ প্রতিসম।

(ঘ) সমীকরণটি থেকে যথেচ্ছ বড় ধনাত্মক y এর জন্য সংশ্লিষ্ট x নির্ণয় করা যায়। সুতরাং x অক্ষের উপর অর্ধতলে লেখচিত্রের বিস্তৃতি সীমাহীন।

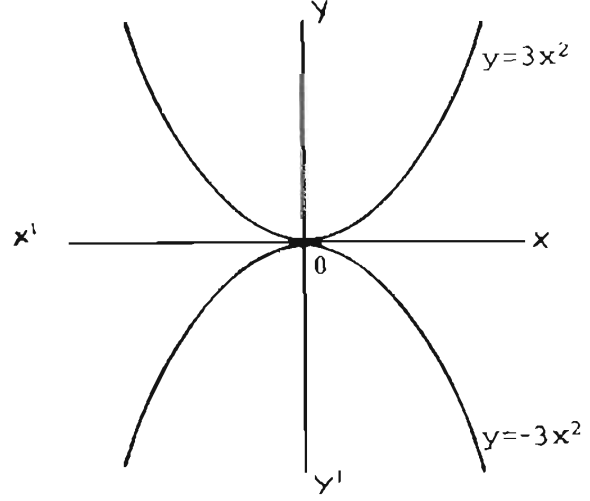
এখন সমীকরণটির যথেষ্ট সংখ্যক সমাধান (x, y) নির্ণয় করে এবং ছক কাগজে তাদের প্রতিরূপী বিন্দুগুলো পাতন করে বিন্দুগুলোকে সহজভাবে পরপর যুক্ত করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

এরূপ লেখচিত্রকে পরাবৃত্ত (Parabola) বলা হয়।

$a < 0$ হলে (1) এর লেখচিত্রও একটি পরাবৃত্ত যা সম্পূর্ণভাবে x অক্ষের নিম্ন-অর্ধতলে থাকে। একই ভাবে দেখা যায় যে, $S = \{(x, y) : y^2 = ax\}$ আকারের অন্বয়ের লেখচিত্র নিম্নরূপ :

এক্ষেত্রেও, লেখচিত্র একটি পরাবৃত্ত, যা x অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম এবং y অক্ষের ডান-অর্ধতলে থাকে (যখন $a > 0$) অথবা বাম-অর্ধতলে থাকে (যখন $a < 0$)

উদাহরণ ৬। একই চিত্রে $S_1 = \{(x, y) : y = 3x^2\}$. $S_2 = \{(x, y)\ y = -3x^2\}$ অন্বয় দুইটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : লক্ষ্য করি যে, দুইটি অন্বয়েরই বর্ণনাকারী সমীকরণ $y = ax^2$ আকারের, যেখানে S_1 এর ক্ষেত্রে $a>0$ এবং S_2 এর ক্ষেত্রে $a<0$। সুতরাং লেখচিত্র দুইটি মূলবিন্দুগামী পরাবৃত্ত এবং y অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম। S_1 এর লেখচিত্র x অক্ষের উর্ধ্ব-অর্ধতলে এবং S_2 এর লেখচিত্র x অক্ষের নিম্ন-অর্ধতলে থাকবে।

এখন বর্ণনাকারী সমীকরণ থেকে $x = 0, \pm \cdot5, \pm 1, \pm 1\cdot5, \pm 2, \pm 2\cdot5, \pm 3$ এর সংশ্লিষ্ট y নির্ণয় করে নিচের ছক তৈরি করি :

x	$y = 3x^2$	$y = -3x^2$
0	0	0
$\pm\cdot5$	$\cdot75$	$-\cdot75$
± 1	3	-3
$\pm 1\cdot5$	$6\cdot75$	$-6\cdot75$
± 2	12	-12
$\pm 2\cdot5$	$18\cdot75$	$-18\cdot75$
± 3	27	27

এখন ছক কাগজে x অক্ষ $X'OX$ এবং y অক্ষ $Y'OY$ নেই। x অক্ষে ছোটবর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের চারগুণকে এবং y অক্ষে ছোটবর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে ছকে বর্ণিত (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি এবং স্থানাঙ্ক লিখে চিহ্নিত করি। x অক্ষের উপর-অর্ধতলে চিহ্নিত বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে S_1 এর লেখচিত্র এবং x অক্ষের নিম্ন-অর্ধতলে চিহ্নিত বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে S_2 এর লেখচিত্র পাওয়া গেল। লেখচিত্রের পাশে সমীকরণ উল্লেখ করে লেখচিত্র দুইটিকে নির্দিষ্ট করি।

উদাহরণ ৭। একই চিত্রে $S_1 = \{(x, y) : y^2 = 25x\}$ এবং

$S_2 = \{(x, y) : y^2 = -25x\}$ অন্বয় দুইটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : লক্ষ করি দুইটি অন্বয়েরই বর্ণনাকারী সমীকরণ $y^2 = ax$ আকারের যেখানে S_1 এর ক্ষেত্রে $a>0$ এবং S_2 এর ক্ষেত্রে $a<0$. সুতরাং লেখচিত্র দুইটি মূলবিন্দুগামী পরাবৃত্ত এবং x অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম। S_1 এর লেখচিত্র y অক্ষের ডান-অর্ধতলে এবং S_2 এর লেখচিত্র y অক্ষের বাম– অর্ধতলে থাকবে।

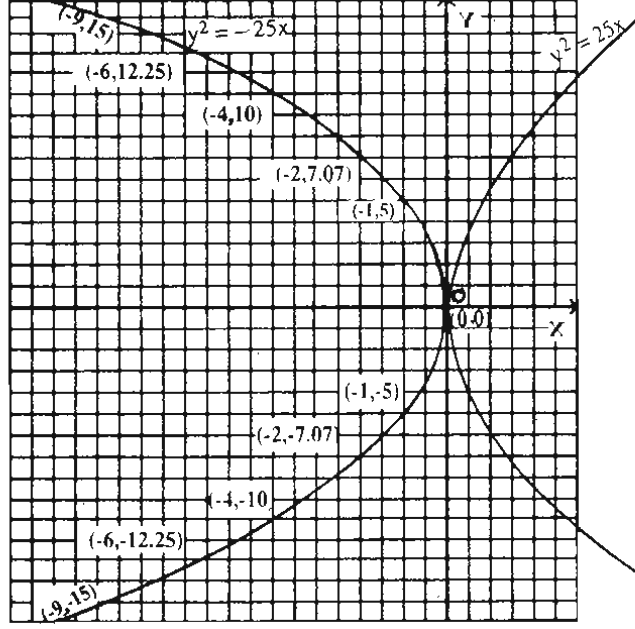
এখন S_1 এর ক্ষেত্রে বর্ণনাকারী সমীকরণ $y^2 = 25x$ থেকে দেখি যে $y = \pm\sqrt{25x}$ যেখানে $x > 0$। এই সমীকরণ থেকে $x = 0, 1, 2, 4, 6, 9$ এর সংশ্লিষ্ট y নির্ণয় করে নিচের ছক তৈরি করি :

x	0	1	2	4	6	9
$y = \pm\sqrt{25x}$	0	± 5	$\pm 7{\cdot}07$	± 10	$\pm 12{\cdot}25$	± 15

একইভাবে S_2 এর ক্ষেত্রে $y^2 = \sqrt{-25x}$ সমীকরণ থেকে দেখি যে $y = \sqrt{-25x}$, যেখানে $x \leq 0$। এই সমীকরণ থেকে $x = 0, -1, -2, -4, -6, -9$ এর সংশ্লিষ্ট y নির্ণয় করে নিচের ছক তৈরি করি :

x	0	-1	-2	-4	-6	-9
$y = \pm\sqrt{-25x}$	0	±5	$\pm7{\cdot}07$	±10	$\pm12{\cdot}25$	±15

ছক কাগজে x অক্ষ XOX' ও y অক্ষ YOY' নেই। x অক্ষে ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে এবং y অক্ষে ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে ছক দুইটিতে বর্ণিত (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি এবং স্থানাঙ্ক লিখে চিহ্নিত করি। y অক্ষের ডান-অর্ধতলে চিহ্নিত বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে S_1 এর লেখচিত্র এবং y

অক্ষের বাম-অর্ধতলে চিহ্নিত বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে S_2 এর লেখচিত্র পাওয়া গেল। লেখচিত্রের পাশে সমীকরণটিকে উল্লেখ করে লেখচিত্র দুইটিকে নির্দিষ্ট করি।

দ্রষ্টব্য। সাধারণভাবে $y = ay^2 + by + c, (a \neq 0)$

অথবা $x = ay^2 + by + c, (a \neq 0)$ আকারের সমীকরণ দ্বারা বর্ণিত অন্বয় একটি পরাবৃত্ত।

উদাহরণ। $S = \{(x, y) : y = 3 - 4x - 2x^2\}$ অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : S এর বর্ণনাকারী সমীকরণটি $y = ax^2 + bx + c$ আকারের; ফলে লেখচিত্র একটি পরাবৃত্ত।

সমীকরণটিকে এভাবে লেখা যায় : $y = -2(x^2 + 2x + 1) + 5$

বা, $y - 5 = -2(x + 1)^2$ বা, $(x + 1)^2 = -\frac{1}{2}(y - 5)$ বা, $(x + 1)^2 = \frac{1}{2}(5 - y)$.

সুতরাং দেখা যায় যে সমীকরণটিতে

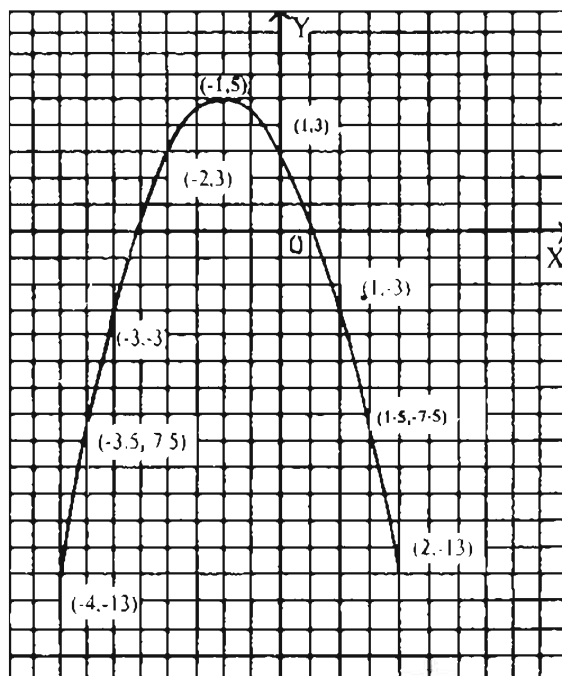
(১) y এর মান 5 অপেক্ষা বড় হতে পারে না, (২) $y = 5$ হলে, $x + 1 = 0$ বা, $x = -1$

(৩) $y < 5$ হলে $x + 1 = \pm\sqrt{\frac{5-y}{2}}$ বা, $x = -1 \pm \sqrt{\frac{5-y}{2}}$

তদুপরি, লেখচিত্রস্থিত কয়েকটি বিন্দু স্থানাঙ্ক নিম্নরূপ (এখানে প্রথমে y এর মান নির্দিষ্ট করে x এর সংশ্লিষ্ট মান নির্ণয় করা হয়েছে) :

x	–1	–2	0	–3	1	–3·5	1·5	–4	2
y	5	3	3	–3	–3	–7·5	–7·5	–13	–13

এখন ছক কাগজের ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে x অক্ষে একক ও ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে y অক্ষে একক

ধরে কাগজটিকে স্থানাঙ্কায়িত করি এবং উপরিউক্ত বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে প্রতিস্থাপিত বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে যুক্ত করে নির্ণেয় লেখচিত্র টানি।

উপবৃত্ত লেখচিত্র

$a > 0$ ও $b > 0$ এবং $a \neq b$ ধরে $S = \{(x, y) ঃ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$

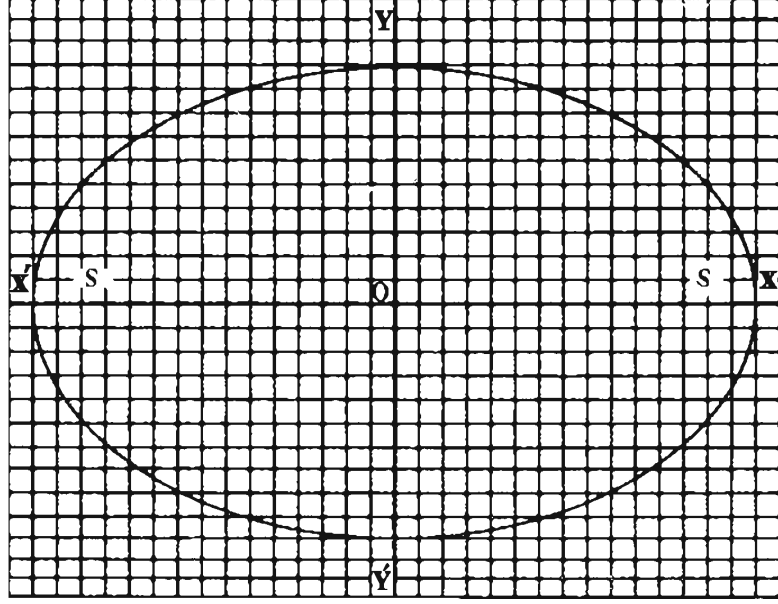
আকারের অন্বয়ের লেখ অঙ্কনের জন্য বর্ণনাকারী সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ থেকে দেখা যায় যে :

(ক) সমীকরণটিকে $y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$ বা, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ আকারে লেখা যায়। সুতরাং সমীকরণটিতে অবশ্যই $x^2 \leq a^2$ বা, $|x| \leq a$ বা, $-a \leq x \leq a$ হবে। সমীকরণটিকে $x^2 = a^2(1 - \frac{y^2}{b^2})$

বা $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$ আকারেও লেখা যায়। সুতরাং সমীরকরণটিতে অবশ্যই $y^2 \leq b^2$ বা $|y| \leq b$ বা $-b \leq y \leq b$ হবে। এ অবস্থায় S এর লেখচিত্র সম্পূর্ণভাবে $x = \pm a$, $y = \pm b$ রেখা দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের অন্তর্ভুক্ত হবে।

খ) সমীকরণটিতে $x = a$ অথবা $x = -a$ হলে $y = o$ হয় এবং $-a < x < a$ হলে $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ হয়। সুতরাং লেখচিত্র $(a, 0)$, $(-a, 0)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষ সাপেক্ষ প্রতিসম হয়। আবার সমীকরণটিতে $y=b$ অথবা $y = -b$ হলে $x = 0$ হয় এবং $-b < y < b$ হলে $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ হয়।

সুতরাং লেখচিত্র $(0, b)$ ও $(0, -b)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং y অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম হয়।

সমীকরণটি থেকে লেখচিত্রস্থিত যথেষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করে বিন্দগুলোকে স্থানাঙ্কায়িত সমতলে স্থাপন করলে এবং প্রতিস্থাপিত বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে পরপর যুক্ত করলে নিম্নরূপ একটি আবদ্ধ বক্ররেখা পাওয়া যায়।

এরূপ লেখকে উপবৃত্ত (ellipse) বলা হয়। সাধারণভাবে, $a > 0$ ও $b > 0$ হলে এবং $a \neq b$ হলে $a(x-h)^2 + b(y-k)^2 = 1$ আকারের সমীকরণ দ্বারা বর্ণিত অন্বয়ের লেখচিত্র একটি উপবৃত্ত।

উদাহরণ। $S = \{(x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$ অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : সমীকরণটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ আকারের। ফলে, লেখচিত্র একটি উপবৃত্ত। সমীকরণটি হতে পাওয়া যায় :

$y^2 = 4(1 - \frac{x^2}{9})$ বা, $y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$

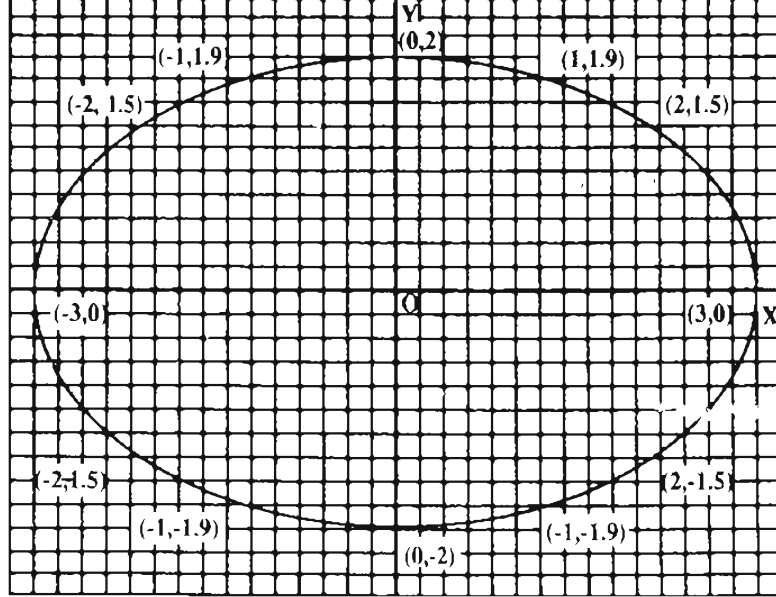
যেখানে $-3 \leq x \leq 3$

$x^2 = 9(1 - \frac{y^2}{4})$ বা, $x = \pm \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}$,

যেখানে $-2 \leq y \leq 2$

এই সম্পর্কগুলো থেকে লেখচিত্রস্থিত কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

x	–3	3	0	0	1	1	–1	–1	2	2	–2	–2
y	0	0	–2	2	1·9	–1·9	1·9	–1·9	–1·5	1·5	1·5	–1·5

এখন ছক কাগজের ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের ৫ গুণকে একক ধরে কাগজটিকে স্থানাঙ্কায়িত করি এবং নির্ণীত বিন্দুগুলোকে স্থাপন করি। প্রতিস্থাপিত বিন্দুগুলোকে সাবলীল বক্ররেখায় যুক্ত করে উপবৃত্ত লেখচিত্রটি অঙ্কিত হল ।

অনুশীলনী ৫.২

১। অনুশীলনী ৫·১ এর প্রশ্ন ১ এ বর্ণিত অন্বয়গুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

২। অনুশীলনী ৫·১ এর প্রশ্ন ২ এ বর্ণিত অন্বয়গুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

৩। S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কি না তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর যেখানে :

(ক) $S = \{ (x, y) : 2x - y + 5 = 0\}$ (খ) $S = \{ (x, y) : x + y = 1\}$

(গ) $S = \{ (x, y) : 3x + y = 4\}$ (ঘ) $S = \{ (x, y) : x = -2\}$

(ঙ) $S = \{ (x, y) : y = 4\}$.

৪। S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কি না তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর যেখানে :

(ক) $S = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$

(খ) $S = \{ (x, y) : x^2 + (y-1)^2 = 16\}$

(গ) $S = \{ (x, y) : x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0\}$

(ঘ) $S = \{ (x, y) : x^2 + y - 2x - 4y - 11 = 0\}$

(ঙ) $S = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 9$ এবং $y \geq 0\}$

(চ) $S = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 9$ এবং $x \geq 0\}$.

৫। S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কি না তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর যেখানে :

(ক) $S = \{ (x, y) : y = 2x^2\}$ (খ) $S = \{ (x, y) : y = -4x^2\}$

(গ) $S = \{ (x, y) : y^2 = 9x\}$ (ঘ) $S = \{ (x, y) : y^2 = -16x\}$

(ঙ) $S = \{ (x, y) : y = x^2 - 4x + 7\}$ (চ) $S = \{ (x, y) : y = -x^2 - 2\}$

(ছ) $S = \{ (x, y) : y^2 = x - 2\}$ (জ) $S = \{ (x, y) : (y - 1)^2 = 4x\}$

৬। S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর যেখানে :

(ক) $S = \{ (x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1\}$

(খ) $S = \{ (x, y) : 2x^2 + y^2 = 2\}$

(গ) $S = \{ (x, y) : (x - 1)^2 + 4y^2 = 16\}$.

বহুনির্বাচনী ও সৃজনশীল প্রশ্নাবলী

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। {(2,2), (4,2), (2,10), (5,10), (7,7)} অন্বয়ের ডোমেন কোনটি ?

ক. {2, 4, 5, 7} খ. {2, 2, 10, 7}
গ. {2, 2, 10, 7} ঘ. {2, 4, 2, 5, 7}

২। $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$ এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
নিচের কোনটি S অন্বয়ের সদস্য ?

ক. (2, 4) খ. (–2, 4)
গ. (–1, 1) ঘ. (1, –1)

৩। যদি S = {(1, 4), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 4)} হয়, তবে

i. S অন্বয়ের রেঞ্জ, S = {4, 1, 0, 4}
ii. S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়, S^{-1} = {(4, 1), (1,2), (0,3), (1,4), (4,5)}
iii. S অন্বয়টি একটি ফাংশন।

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii
গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে নিচের ৪ - ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

যদি $F(x) = \sqrt{(x-1)}$

৪। $F(10)$ = কত ?

ক. 9 খ. 3

গ. –3 ঘ. $\sqrt{10}$

৫। $F(x) = 5$ হলে, x এর মান কত ?

ক. 5 খ. 24

গ. 25 ঘ. 26

৬। ফাংশনটির ডোমেন নিচের কোনটি ?

ক. ডোম, $F = \{x \in R : x \neq 1\}$ খ. ডোম, $F = \{x \in R : x \geq 1\}$

গ. ডোম, $F = \{x \in R : x \leq 1\}$ ঘ. ডোম $F = \{x \in R : x > 1\}$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং $\{2, 3, 5, 7\}$

A সেটের কয়েকটি উপাদানের সাথে B সেটের কয়েকটি উপাদানকে অন্বিত করে নিম্নের চিত্রে দেখানো হল :

ক. গঠিত অন্বয়টি D হলে, D এর মান ক্রমজোড়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$
অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা করে ডোম S এবং রেঞ্জ S নির্ণয় কর।

গ. উপরে বর্ণিত অন্বয়টির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কি-না তা লেখচিত্র হতে নির্ণয় কর।

২। $F(x) = 2x - 1$

ক. $F(x+1)$ এবং $F(\frac{1}{2})$ নির্ণয় কর।

খ. $F(x)$ ফাংশনটি এক-এক কি-না তা নির্ধারণ কর।

গ. $F(x) = y$ হলে x- এর তিনটি মান নির্ণয় কর, যখন, $x, y \in N$
এবং $y = 2x-1$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

৩। $F : R_+ \to R_+, F(x) = x^2$

ক. R_+ কিসের সেট নির্দেশ করে। ডোম F কত?

খ. কোন শর্ত সাপেক্ষে কোন ফাংশন এক-এক হবে? দেখাও যে, F এক-এক ফাংশন।

গ. রেঞ্জ F নির্ণয় কর। $F(x) = 100$ হলে, x নির্ণয় কর।

ষষ্ঠ অধ্যায়

এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ ও অসমতা

৬.১। মূল চিহ্ন সম্বলিত সমীকরণ

আমরা জানি, চলকের যে মান বা মানগুলোর জন্য সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয়, ঐ মান বা মানগুলোই সমীকরণের বীজ বা মূল (Root) এবং ঐ মান বা মানগুলোর দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

সমীকরণের চলকের বর্গমূল সম্বলিত রাশি থাকলে তাকে বর্গ করে বর্গমূল চিহ্নমুক্ত নতুন সমীকরণ পাওয়া যায়। উক্ত সমীকরণ সমাধান করে যে বীজগুলো পাওয়া যায় অনেক সময় সবগুলো বীজ প্রদত্ত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না। এ ধরনের বীজ অবান্তর (extraneous) বীজ। সুতরাং মূলচিহ্ন সম্বলিত সমীকরণ সমাধান প্রক্রিয়ার প্রাপ্ত বীজগুলো প্রদত্ত সমীকরণের বীজ কি না তা অবশ্যই পরীক্ষা করে দেখা দরকার। পরীক্ষার পর যে সব বীজ উক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে তাই হবে প্রদত্ত সমীকরণের বীজ। নিচে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল।

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $\sqrt{8x+9} - \sqrt{2x+15} = \sqrt{2x-6}$

সমাধান : $\sqrt{8x+9} - \sqrt{2x+15} = \sqrt{2x-6}$

বা, $\sqrt{2x+15} + \sqrt{2x-6} = \sqrt{8x+9}$

$\Rightarrow 2x + 15 + 2x - 6 + 2\sqrt{2x+15}\sqrt{2x-6} = 8x + 9$ [বর্গ করে]

বা, $\sqrt{2x+15}\,\sqrt{2x-6} = 2x$

$\Rightarrow (2x + 15)(2x - 6) = 4x^2$ [পুনরায় বর্গ করে]

বা, $4x^2 + 18x - 90 = 4x^2$

বা, $18x = 90$

$\therefore x = 5$

$x = 5$ হলে, বামপক্ষ $\sqrt{49} - \sqrt{25} = 7 - 5 = 2$ এবং ডানপক্ষ $= \sqrt{4} = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 5$.

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9}$

সমাধান : $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9}$

$\Rightarrow x + 4 + x + 11 + 2\sqrt{(x+4)(x+11)} = 8x + 9$ [বর্গ এবং পরে পক্ষান্তর করে]

বা, $2\sqrt{x^2 + 15x + 44} = 6x - 6$ [পক্ষান্তর ও সরল করে]

বা, $2\sqrt{x^2 + 15x + 44} = 3x - 3$

বা, $8x^2 - 33x - 35 = 0$ [আবার বর্গ করে এবং পরে পক্ষান্তর করে]

$\Rightarrow 8x^2 - 40x + 7x - 35 = 0$

বা, $(8x + 7)(x - 5) = 0$

$\therefore x = -\dfrac{7}{8}$ অথবা 5.

$x = -\frac{7}{8}$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{4 - \frac{7}{8}} + \sqrt{11 - \frac{7}{8}} = \frac{5}{\sqrt{8}} + \frac{9}{\sqrt{8}} = \frac{14}{2\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$

ডানপক্ষ $= \sqrt{9 - 8.\frac{7}{8}} = \sqrt{2}$

$\therefore x = -\frac{7}{8}$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ নয়।

$x = 5$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{5+4} + \sqrt{5+11} = 3 + 4 = 7$

ডানপক্ষ $= \sqrt{8.5 + 9} = 7$

$\therefore x = 5$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 5$.

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}$

সমাধান : $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}$

$\Rightarrow 2x + 9 + x - 4 - 2\sqrt{(2x+9)(x+4)} = x + 1$ [বর্গ করে]

বা, $2\sqrt{2x^2 + x - 36} = 2x + 4$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 36 = x^2 + 4x + 4$

বা, $x^2 - 3x - 40 = 0$

বা, $(x-8)(x+5) = 0$

$\therefore x = 8$ অথবা -5

$x = 8$ হলে, বামপক্ষ $= 5 - 2 = 3$ এবং ডানপক্ষ $= 3$

অতএব, $x = 8$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

$x = -5$ গ্রহণযোগ্য নয়, কেননা সমীকরণে $x = -5$ বসালে ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল আসে যা সংজ্ঞায়িত নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 8$

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}$

সমাধান : $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}$

বা, $\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{2} = -\sqrt{x^2 - 7x + 12}$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 + 2 - 2\sqrt{2x^2 - 6x + 4} = x^2 - 7x + 12$ [বর্গ করে]

বা, $2\sqrt{2x^2 - 6x + 4} = 4x - 8$

$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = (2x-4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 - 5x + 6 = 0$

বা, $(x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x = 2$ অথবা $x = 3$.

এখানে, $x = 2$ হলে বামপক্ষ $= \sqrt{2}$ = ডানপক্ষ
এবং $x = 3$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{2}$ = ডানপক্ষ
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = 2, 3$.

উদাহরণ ৫। সমাধান কর : $\sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

সমাধান : $\sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

এখন $x^2 - 6x = y$ ধরলে প্রদত্ত সমীকরণ হবে

$\sqrt{y + 15} - \sqrt{y + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

বা, $\sqrt{y + 15} + \sqrt{8} = \sqrt{y + 13} + \sqrt{10}$

$\Rightarrow y + 15 + 8 + 2\sqrt{8y + 120} = y + 13 + 10 + 2\sqrt{10y + 130}$ [বর্গ করে]

বা, $\sqrt{8y + 120} = \sqrt{10y + 130}$

$\Rightarrow 8y + 120 = 10y + 130$

বা, $10y - 8y = 120 - 130$ [বর্গ করে]

বা, $2y = -10$ বা $y = -5$

বা, $x^2 - 6x = -5$ [y এর মান বসিয়ে]

বা, $x^2 - 6x + 5 = 0$ বা $(x - 1)(x - 5) = 0$

$\therefore x = 1$ অথবা 5.

$x = 1$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{10} - \sqrt{8}$ = ডানপক্ষ

$x = 5$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{10} - \sqrt{8}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = 1, 5$.

উদাহরণ ৬। সমাধান কর : $(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

সমাধান : $(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow 1 + x + 1 - x + 3(1 + x)\ (1 - x)^{\frac{1}{3}} \left\{(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}\right\} = 2$ [ঘন করে]

বা, $2 + 3(1 + x)^{\frac{1}{3}}(1 - x)^{\frac{1}{3}} 2 = 2$ বা, $3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}(1 + x)^{\frac{1}{3}} . (1 - x)^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}} = 0$ বা $(1 + x)(1 - x) = 0$ [আবার ঘন করে]

$x = 1$ এবং $x = -1$ উভয়ই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

$\therefore x = -1$ অথবা 1 $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \pm 1$

অনুশীলনী ৬.১

সমাধান কর :

১। $\sqrt{x-4}+2=\sqrt{x+12}$

২। $\sqrt{11x-6}=\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-1}$

৩। $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$

৪। $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}+2=0$

৫। $\sqrt{11x-6}=\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}$

৬। $\sqrt{x^2+4x-4}+\sqrt{x^2+4x-10}=6$

৭। $\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2-6x+6}=1$

৮। $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$

৯। $6\sqrt{\left(\frac{2x}{x-1}\right)}+5\sqrt{\left(\frac{x-1}{2x}\right)}=13$

১০। $\sqrt{\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)}+2\sqrt{\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)}=3$

৬.২। সূচক সমীকরণ (Indicial Equation)

যে সমীকরণে অজ্ঞাত চলক সূচকরূপে থাকে, তাকে সূচক সমীকরণ বলে।

$2^x = 8$, $16^x = 4^{x+2}$, $2^{x+1} - 2^x - 8 = 0$ ইত্যাদি সমীকরণগুলো সূচক সমীকরণ যেখানে x অজ্ঞাত চলক।
সূচক সমীকরণ সমাধান করতে সূচকের নিম্নলিখিত ধর্মটি প্রায়ই ব্যবহার করা হয় :

$a \neq 1$ হলে $a^x = a^m$ হবে যদি ও কেবল যদি $x = m$ হয়। এজন্য প্রথমে সমীকরণের উভয় পক্ষকে একই সংখ্যার ঘাত বা শক্তিরূপে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $2^{x+7} = 4^{x+2}$

সমাধান : $2^{x+7} = 4^{x+2}$ বা, $2^{x+7} = (2^2)^{x+2}$ বা, $2^{x+7} = 2^{2x+4}$

$\therefore x + 7 = 2x + 4$ বা, $x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 3$.

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $3.27^x = 9^{x+4}$

সমাধান : $3.27^x = 9^{x+4}$ বা, $3.(3^3)^x = (3^2)^{x+4}$

বা, $3.3^{3x} = 3^{2(x+4)}$ বা, $3^{3x+1} = 3^{2x+8}$

$\therefore 3x + 1 = 2x + 8$ বা, $x = 7$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 7$.

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $3^{mx-1} = 3a^{mx-2}$, $(a > 0, a \neq 3, m \neq 0)$

সমাধান : $3^{mx-1} = 3a^{mx-2}$

বা, $\dfrac{3^{mx-1}}{3} = 3a^{mx-2}$ [উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $3^{mx-2} = a^{mx-2}$ বা, $\left(\dfrac{a}{3}\right)^{mx-2} = 1 = \left(\dfrac{a}{3}\right)^0$

বা, $mx - 2 = 0$ বা, $mx = 2$ বা, $x = \dfrac{2}{m}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \dfrac{2}{m}$

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $2^{3x-5}.\ a^{x-2} = 2^{x-3}.\ 2a^{1-x}$, $(a > 0$ এবং $a \neq \frac{1}{2})$.

সমাধান : $2^{3x-5}.\ a^{x-2} = 2^{x-3}.\ 2a^{1-x}$

বা, $\dfrac{a^{x-2}}{a^{1-x}} = \dfrac{2^{x-3}.2^1}{2^{3x-5}}$ বা, $a^{x-2-1+x} = 2^{x-3+1-3x+5}$ বা, $a^{2x-3} = 2^{-2x+3}$

বা, $a^{2x-3} = 2^{-(2x-3)}$ বা, $a^{2x-3} = \dfrac{1}{2^{2x-3}}$ বা, $a^{2x-3}.2^{2x-3} = 1$

বা, $(2a)^{2x-3} = 1 = (2a)^0$

$\therefore 2x - 3 = 0$ বা, $2x = 3$ বা, $x = \dfrac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \dfrac{3}{2}$

উদাহরণ ৫। সমাধান কর : $a^{-x}(a^x + b^{-x}) = \frac{a^2b^2 + 1}{a^2b^2}$, $(a > 0, b > 0$ এবং $ab \neq 1)$

সমাধান : $a^{-x}(a^x + b^{-x}) = 1 + \frac{1}{a^2b^2}$ বা, $a^{-x}.a^x + a^{-x}.b^{-x} = 1 + \frac{1}{a^2b^2}$

বা, $1 + (ab)^{-x} = 1 + (ab)^{-2}$ বা, $(ab)^{-x} = (ab)^{-2}$

$\therefore -x = -2$ বা, $x = 2.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2.$

উদাহরণ ৬। সমাধান কর : $3^{x+5} = 3^{x+3} + \frac{8}{3}$

সমাধান : $3^{x+5} = 3^{x+3} + \frac{8}{3}$ বা, $3^x.3^5 = 3^x3^3 + \frac{8}{3}$

বা, $3^x.3^6 - 3^x.3^4 = 8$ [পক্ষান্তর এবং উভয় পক্ষে 3 দ্বারা গুণ করে]

বা, $3^x.3^4(3^2 - 1) = 8$ বা, $3^{x+4}.8 = 8$ বা, $3^{x+4} = 1 = 3^0$

$\therefore x + 4 = 0$ বা, $x = -4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = -4$

উদাহরণ ৭। সমাধান কর : $3^{2x-2} - 5.3^{x-2} - 66 = 0$

সমাধান : $3^{2x-2} - 5.3^{x-2} - 66 = 0$ বা, $\frac{3^{2x}}{9} - \frac{5}{9}.3^x - 66 = 0$

বা, $3^{2x} - 5.3^x - 594 = 0$ [উভয় পক্ষে 9 দ্বারা গুণ করে]

বা, $a^2 - 5a - 594 = 0$ ($3^x = a$ ধরে)

বা, $a^2 - 27a + 22a - 594 = 0$

বা, $(a - 27)(a + 22) = 0$

এখন $a \neq -22$, কেননা $a = 3^x > 0$ সুতরাং $a + 22 \neq 0$

অতএব, $a - 27 = 0$ বা, $3^x = 27 = 3^3$

$\therefore x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\therefore x = 3.$

উদাহরণ ৮। সমাধান কর : $a^{2x} - (a^3 + a)a^{x-1} + a^2 = 0$ $(a > o, a \neq 1)$

সমাধান : $a^{2x} - (a^3 + a)a^{x-1} + a^2 = 0$

বা, $a^{2x} - a(a^2 + 1)a^x.a^{-1} + a^2 = 0$

বা, $a^{2x} - (a^2 + 1)a^x + a^2 = 0$

বা, $p^2 - (a^2 + 1)p + a^2 = 0$ ($a^x = p$ ধরে)

বা, $p^2 - a^2p - p + a^2 = 0$

বা, $(p - 1)(p - a^2) = 0$

$\therefore p = 1$ অথবা $p = a^2$

বা, $a^x = 1 = a^0$ বা, $a^x = a^2$

$\therefore x = 0$ $\therefore x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = 0, 2.$

অনুশীলনী ৬.২

সমাধান কর :

১। $3^{x+2} = 81$

২। $5^{3x-7} = 3^{3x-7}$

৩। $2^{x-4} = 4a^{x-6}$, $(a > 0, a \neq 2)$

৪। $(\sqrt{3})^{x+5} = (\sqrt[3]{3})^{2x+5}$

৫। $(\sqrt[5]{4})^{4x+7} = (\sqrt[11]{64})^{2x+7}$

৬। $\dfrac{3^{2x-4}.a^{2x-5}}{3^{x+1}} = a^{2x-5}$ $(a > 0)$

৭। $\dfrac{5^{3x-5}.b^{2x-6}}{5^{x+1}} = a^{2x-6}$ $(a > 0, b > 0, 5b \neq a)$

৮। $4^{x+2} = 2^{2x+1} + 14$

৯। $5^{x} + 5^{2-x} = 26$

১০। $3\,(9^{x} - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$

১১। $4^{1+x} + 4^{1-x} = 10$

১২। $2^{2x} - 3.2^{x+2} = -32$

৬.৩। পরমমান সম্বলিত সমীকরণ

সংজ্ঞা। x কোনো বাস্তব সংখ্যা হলে x এর পরমমান

$$|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x > 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \end{cases}$$

যেমন, $|5| = 5$, $|0| = 0$, $|-5| = -(-5) = 5$

লক্ষণীয় যে,

(ক) $|x| = 0$ যদি ও কেবল যদি $x = 0$ হয়। $x \neq 0$ হলে $|x| > 0$

(খ) $|x|^2 = x^2$, সুতরাং $\sqrt{x^2} = |x|$.

(গ) $|x - a|$ হচ্ছে সংখ্যারেখায় a এর প্রতিরূপী বিন্দু থেকে x এর প্রতিরূপী বিন্দুর দূরত্ব।

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $|x - 4| = 2$

সমাধান : $|x - 4| = 2$

বা, $x - 4 = 2$ (যখন $x - 4 > 0$)

বা, $x = 4 + 2$

বা, $x = 6$

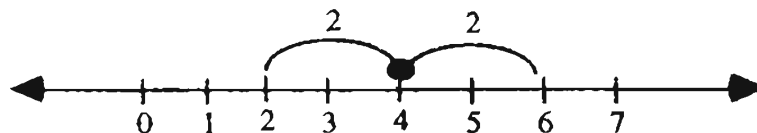
অথবা $-(x - 4) = 2$ (যখন $x - 4 < 0$)

বা, $-x + 4 = 2$

বা, $x = 4 - 2$

বা, $x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 6, 2$.

দ্রষ্টব্য ১। $|x - 4|$ হচ্ছে সংখ্যারেখায় 4 এর প্রতিরূপী বিন্দু থেকে x এর প্রতিরূপী বিন্দুর দূরত্ব। সুতরাং

$|x-4| = 2$ হবে যদি ও কেবল যদি $x = 4+2 = 6$ অথবা $x = 4-2 = 2$ হয়।

সাধারণভাবে, $d \geq 0$ হলে $|x-a| = d$ যদি ও কেবল যদি $x = a+d$ অথবা $x = a-d$

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $\frac{|x|}{x} + x^2 = 2$

সমাধান : $\frac{|x|}{x} + x^2 = 2 \qquad (1)$

এখানে $x \neq 0$ এবং $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 \text{ যখন } x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

এখন $x > 0$ হলে (1) থেকে পাওয়া যায়,

$1 + x^2 = 2$ বা, $x^2 = 1$ বা, $x = 1$ ($x > 0$ বলে $x \neq -1$)

আবার, $x < 0$ হলে (1) থেকে পাওয়া যায়,

$-1 + x^2 = 2$ বা, $x^2 = 3$

বা, $x = -\sqrt{3}$ ($x < 0$ বলে $x \neq \sqrt{3}$)

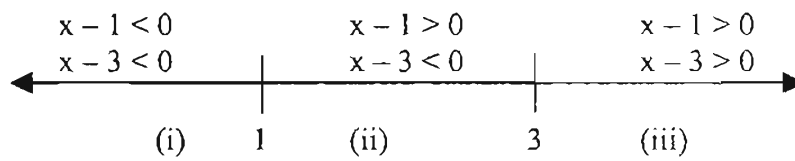
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 1, -\sqrt{3}$.

[শুদ্ধি পরীক্ষা : $x = 1$ হলে (1) এর বাম পক্ষ = $\quad + 1 = 2$

এবং $x = -\sqrt{3}$ হলে (1) এর বামপক্ষ = $\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} + (-3)^2 = -1 + 3 = 2$]

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $|x-1| + |x-3| = 5$

সমাধান : $|x-1| + |x-3| = 5 \quad (1)$

লক্ষ করি ,

উল্লেখ্য $x - 1 < 0$ ও $x - 3 > 0$ ঘটনাটি অবাস্তব।

এখন (i) $x < 1$ অথবা (ii) $1 \leq x < 3$ অথবা $x \geq 3$ পৃথকভাবে বিবেচনা করি।

(i) হলে (1) থেকে $-(x-1)-(x-3) = 5$ বা, $-x+1-x+3 = 5$

বা, $-2x = 5-1-3 = 1 \qquad \therefore x = -\frac{1}{2}$

এক্ষেত্রে যেহেতু $-\frac{1}{2} < 1$, সুতরাং $x = -\frac{1}{2}$

(ii) হলে (1) থেকে $x-1-(x-3) = 5$ বা, $x-1-x+3 = 5$ বা, $2 = 5$, যা অসম্ভব। সুতরাং এক্ষেত্রে কোনো সমাধান নেই।

(iii) হলে (1) থেকে $x-1+x-3 = 5$ বা, $2x = 5+1+3 = 9$ বা, $x = \frac{9}{2}$

এক্ষেত্রে যেহেতু $\frac{9}{2} > 3$ সুতরাং $x = \frac{9}{2}$ গ্রহণযোগ্য $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = -\frac{1}{2}, \frac{9}{2}$
[শুদ্ধি পরীক্ষা নিজে কর]

অনুশীলনী ৬.৩

সমাধান কর :

১। $|x| = 3$ ২। $|x - 3| = 2$ ৩। $|x + 5| = 7$

৪। $|x + 2| = |x - 1|$ ৫। $|x| + |x + 1| = 5$ ৬। $|x - 1| = 2|x + 1|$

৬.৪। অসমতা

আমরা এখন কতিপয় অসমতার সমাধান নিয়ে আলোচনা করব (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তকের প্রাসঙ্গিক আলোচনা দ্রষ্টব্য)।

উদাহরণ ১। সমাধান : $\frac{3x+1}{2x-1} > \frac{2x+1}{3x-1}$

সমাধান : $\frac{3x+1}{2x-1} > \frac{2x+1}{3x-1}$ .... (1) যদি ও কেবল যদি $\frac{3x+1}{2x-1} - \frac{2x+1}{3x-1} > 0$

বা, $\frac{(3x+1)(3x-1) - (2x+1)(2x-1)}{(2x-1)(3x-1)} > 0$

বা, $\frac{9x^2 - 1 - 4x^2 + 1}{(2x-1)(3x-1)} > 0$

বা, $\frac{5x^2}{(2x-1)(3x-1)} > 0$ বা, $(2x-1)(3x-1) > 0$ [$5x^2 > 0$]

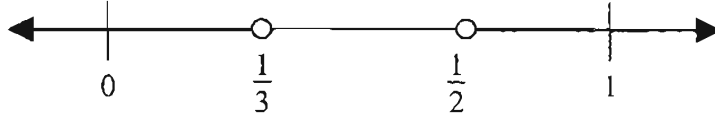
বা, $6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3}) > 0$ বা, $(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3}) > 0$ .... (2)

এখন $(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2}) > 0$ যদি ও কেবল যদি $(x - \frac{1}{3})$ ও $(x - \frac{1}{2})$ উভয়ই ধনাত্মক হয় অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হয়।
লক্ষ করি,

যখন	$(x - \frac{1}{3})$ এর চিহ্ন	$(x - \frac{1}{2})$ এর চিহ্ন
$x < \frac{1}{3}$	–	–
$\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$	+	–
$x > \frac{1}{2}$	+	+

সুতরাং (2) সত্য হবে যদি ও কেবল যদি $x < \frac{1}{3}$ অথবা $x > \frac{1}{2}$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x < \frac{1}{3}$ অথবা $x > \frac{1}{2}$

মন্তব্য । এখানে সমাধান সেট $S = \{x : x < \frac{1}{3}\} \cup \{x : x > \frac{1}{2}\}$

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $\frac{3x+4}{5x+3} < \frac{x+2}{2x+3}$

সমাধান : $\frac{3x+4}{5x+3} < \frac{x+2}{2x+3}$ ....(1) যদি ও কেবল যদি $\frac{3x+4}{5x+3} - \frac{x+2}{2x+3} < 0$

বা, $\frac{(3x+4)(2x+3) - (x+2)(5x+3))}{(5x+3)(2x+3)} < 0$

বা, $\frac{6x^2 + 9x + 8x + 12 - 5x^2 - 3x - 10x - 6}{(5x+3)(2x+3)} < 0$ বা, $\frac{x^2 + 4x + 6}{(5x+3)(2x+3)} < 0$

বা, $\frac{x^2 + 4x + 4 + 2}{(5x+3)(2x+3)} < 0$ বা, $\frac{(x+2)^2 + 2}{(5x+3)(2x+3)} < 0$

কিন্তু সকল x এর জন্য $(x+2)^2 + 2 \geq 2 > 0$

সুতরাং (1) সত্য হবে যদি ও কেবল যদি $(5x+3)(2x+3) < 0$ বা, $10(x+\frac{5}{3})(x+\frac{3}{5}) < 0$

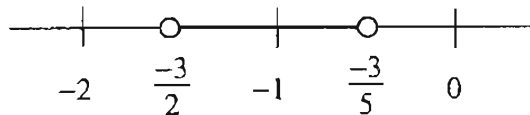
বা, $\{x - (-\frac{5}{3})\}\{x - (-\frac{3}{2})\} < 0$ ....(2)

লক্ষ করি,

যখন	$\{x - (-\frac{3}{2})\}$ এর চিহ্ন	$\{x - (-\frac{3}{5})\}$ এর চিহ্ন
$-\frac{3}{2} < x < -\frac{3}{5}$	+	–

সুতরাং (২) সত্য হয় যদি ও কেবল যদি $-\frac{3}{2} < x < -\frac{3}{5}$ ∴ নির্ণেয় সমাধান, $-\frac{3}{2} < x < -\frac{3}{5}$

মন্তব্য। এখানে সমাধান সেট $S = \{x : -\frac{3}{2} < x < -\frac{3}{5}\}$

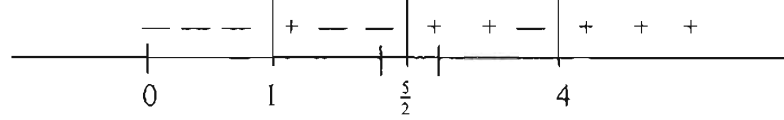
$-2 \quad \frac{-3}{2} \quad -1 \quad \frac{-3}{5} \quad 0$

উদাহরণ ৩। সমাধান সেট নির্ণয় কর : $\frac{x-3}{x-4} > \frac{x-2}{x-1}$

সমাধান : $\frac{x-3}{x-4} > \frac{x-2}{x-1}$ ....(1) যদি ও কেবল যদি $\frac{x-3}{x-4} - \frac{x-2}{x-1} > 0$

বা, $\frac{(x-3)(x-1) - (x-2)(x-4)}{(x-4)(x-1)} > 0$ বা, $\frac{x^2 - 4x + 3 - x^2 + 6x - 8}{(x-4)(x-1)} > 0$

বা, $\frac{2x-5}{(x-4)(x-1)} > 0$ বা, $\frac{2(x-\frac{5}{2})}{(x-4)(x-1)} >$ .... (2)

এখন (2) সত্য হবে যদি ও কেবল যদি $(x-1)$, $(x-\frac{5}{2})$ ও $(x-4)$ রাশিগুলোর দুইটি ঋণাত্মক ও একটি ধনাত্মক হয় অথবা তিনটিই ধনাত্মক হয়।

লক্ষ করি,

$x < 1$ হলে $x-1 < 0, x-\frac{5}{2} < 0, x-4 < 0$

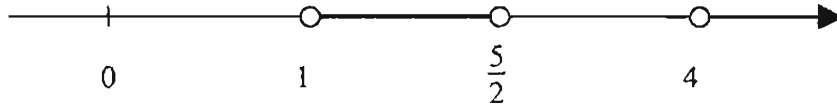
$1 < x < \frac{5}{2}$ হলে $x-1 > 0, x-\frac{5}{2} < 0, x-4 < 0$

$\frac{5}{2} < x < 4$ হলে $x-1 > 0, x-\frac{5}{2} > 0, x-4 < 0$

$x > 4$ হলে $x-1 > 0, x-\frac{5}{2} > 0, x-4 > 0$

সুতরাং (2) সত্য হবে যদি ও কেবল যদি $1 < x < \frac{5}{2}$ অথবা $x > 4$ হয়।

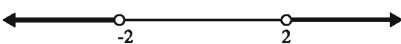
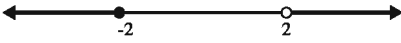
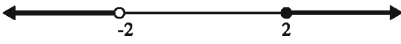
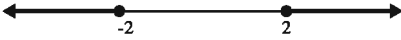
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \{x : 1 < x < \frac{5}{2}$ অথবা $x > 4\}$

মন্তব্য। সংখ্যারেখায় S এর চিত্ররূপ :

অনুশীলনী ৬.৪

সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও :

১। $(2x+5)(x-1) \leq 0$ ২। $(x+2)(4x-3) \geq 0$ ৩। $x(x-1)(x+2) > 0$

৪। $\frac{x(x+1)}{x-2} > 0$ ৫। $\frac{x(x-4)}{x-5} < 0$ ৬। $\frac{x-4}{x-2} > \frac{x-6}{x-3}$

৭। $\frac{x+2}{x+1} > \frac{x-3}{x-4}$ ৮। $\frac{2x+3}{x-3} < \frac{x+3}{x-1}$ ৯। $\frac{(2x-3)(x-2)^2}{x+1} > 0$

বহুনির্বাচনী প্রশ্নাবলী

১। $3.27^x = 9^{x+4}$ হলে, x = কত?

ক. 8 খ. -3
গ. 4 ঘ. 7

২। $|x| > 2$ অসমতার সমাধান সেটের সংখ্যা রেখা কোনটি ?

ক. -2 2

খ. -2 2

গ. -2 2

ঘ. -2 2

৩। i. $\sqrt{x-4} + 2 = \sqrt{x-12}$ সমীকরণটির বীজ, x = 13

ii. x < 0 হলে $\frac{|x|}{x} = 1$

iii. $(x-4)(x-1) > 0$ হবে যদি ও কেবল যদি $x < 1$ অথবা $x > 4$ হয়।

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii
গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিম্নের তথ্যের আলোকে ৪-৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x>0 \\ x \text{ যখন } x<0 \\ x \text{ যখন } x=0 \end{cases}$$

৪। $|-5| + 3 =$ কত?

ক. –2 খ. 8
গ. 2 ঘ. ±2

৫। $|x - 4| = 2$ হলে x এর মান কত ?

ক. 6 খ. 2
গ. 6, 2 ঘ. –6, 2

৬। x এর কোন মানের জন্য $|x| + |x + 1| = 5$ হয়?

ক. 2, –3 খ. –3, 2
গ, –2, 3 ঘ. 2, 3

সপ্তম অধ্যায়

দুই বা তিন চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোট এবং দুই চলকবিশিষ্ট অসমতা

৭.১। দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট

দুই চলক বিশিষ্ট দুইটি একঘাত সমীকরণ অথবা একটি একঘাত ও একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমন্বয়ে গঠিত জোটের সমাধান নির্ণয় পদ্ধতি মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তকে আলোচনা করা হয়েছে। এখানে এরূপ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমন্বয়ে গঠিত কতিপয় জোটের সমাধান নির্ণয় আলোচনা করা হল।

উল্লেখ্য যে, চলক দুইটি x ও y হলে $(x, y) = (a, b)$ এরূপ জোটের একটি সমাধান যদি সমীকরণ দুইটিতে x স্থলে a এবং y স্থলে b বসালে তাদের উভয় পক্ষ সমান হয়।

উদাহরণ ১। সমাধান : $x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2},\ y + \frac{1}{x} = 3$

সমাধান ঃ $x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$ ....(i) $y + \frac{1}{x} = 3$......................... (ii)

(i) কে y দ্বারা গুণ করে পাই,

$xy + 1 = \frac{3}{2}y$ ....(iii)

(ii) কে y দ্বারা গুণ করে পাই,

$xy + 1 = 3x$........................(iv)

(iii) ও (iv) থেকে, $\frac{3}{2}y = 3x$ বা, $y = 2x$ ...... (v)

(v) থেকে y এর মান (iv) এ বসিয়ে পাই,

$2x^2 + 1 = 3x$ বা, $2x^2 - 3x + 1 = 0$

বা, $(x - 1)(2x - 1) = 0$ $\therefore x = 1$ অথবা $\frac{1}{2}$

(v) থেকে, যখন $x = 1$, তখন $y = 2$ এবং যখন $x = \frac{1}{2}$ তখন $y = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (1, 2), (\frac{1}{2}, 1)$.

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $x^2 = 3x + 6y,\ xy = 5x + 4y$.

সমাধান : $x^2 = 3x + 6y$.................................(i) $xy = 5x + 4y$..........................(ii)

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে, $x(x - y) = -2(x - y)$ বা, $x(x - y) + 2(x - y) = 0$

বা, $(x - y)(x + 2) = 0$ $\therefore x = y$............... (iii) বা, $x = -2$............................ (iv)

(iii) ও (i) থেকে আমরা পাই, $y^2 = 9y$ বা, $y(y - 9) = 0$ $\therefore y = 0$ অথবা 9.

(iii) থেকে, যখন $y = 0$ তখন $x = 0$ এবং যখন $y = 9$, তখন $x = 9$

আবার (iv) ও (i) থেকে আমরা পাই, $x = -2$ এবং $4 = -6 + 6y$ বা, $6y = 10$ বা, $y = \frac{5}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (0, 0), (9, 9), (-2, \frac{5}{3})$.

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $x^2 + y^2 = 61, xy = -30$.

সমাধান : $x^2 + y^2 = 61$,....................................(i) $xy = -30$..............................(ii)

(ii) কে 2 দ্বারা গুণ করে (i) এর সাথে যোগ করলে আমরা পাই,

$(x+y)^2 = 1$ বা, $x + y = \pm 1$..........................(iii)

(ii) কে 2 দ্বারা গুণ করে (i) থেকে বিয়োগ করলে আমরা পাই, $(x-y)^2 = 121$

বা, $x - y = \pm 11$..(iv)

(iii) ও (iv) থেকে,

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=11 \end{array}\right\}......(v),\quad \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=-11 \end{array}\right\}.....(vi),\quad \left.\begin{array}{l} x+y=-1 \\ x-y=11 \end{array}\right\}.....(vii),\quad \left.\begin{array}{l} x+y=-1 \\ x-y=-11 \end{array}\right\}....(viii)$$

এখন সমাধান করে,

(v) থেকে $x = 6, y = -5$;   (vi) থেকে $x = -5, y = 6$

(vii) থেকে $x = 5, y = -6$ (viii) থেকে $x = -6, y = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (6, -5), (-5, 6), (5, -6), (-6, 5)$.

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $x^2 - 2xy + 8y^2 = 8, 3xy - 2y^2 = 4$.

সমাধান : $x^2 - 2xy + 8y^2 = 8$...............................(i) $3xy - 2y^2 = 4$....................(ii)

(i) এবং (ii) থেকে আমরা পাই,

$$\frac{x^2 - 2xy + 8y^2}{3xy - 2y2} = \frac{2}{1}$$ বা, $x^2 - 2xy + 8y^2 = 6xy - 4y^2$

বা, $x^2 - 8xy + 12y^2 = 0$ বা, $x^2 - 6xy - 2xy + 12y^2 = 0$

বা, $(x - 6y)(x - 2y) = 0 \therefore x = 6y$................ (iii)   অথবা $x = 2y$....................... (iv)

(iii) থেকে x এর মান (ii) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$3.6y.y - 2y^2 = 4$ বা, $16y^2 = 4$ বা, $y^2 = \frac{1}{4}$ = বা, $y = \pm \frac{1}{4}$

(iii) থেকে, $x = 6 \times (\pm \frac{1}{2}) = \pm 3$.

আবার, (iv) থেকে x এর মান (ii) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$3.2y.y - 2y^2 = 4$ বা, $4y^2 = 4$ বা, $y^2 = 1$ বা, $y = \pm 1$.

(iv) থেকে $x = 2 \times (\pm 1) = \pm 2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (3, \frac{1}{2}), (-3, -\frac{1}{2}), (2, 1) (-2, -1)$.

উদাহরণ ৫। সমাধান কর : $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}, x^2 + y^2 = 90$

সমাধান : $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}$ ....(i) $x^2 + y^2 = 90$........................(ii)

(i) থেকে আমরা পাই,

$$\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{5}{2}$$ বা, $$\frac{2(x^2 + y)^2}{x^2 - y^2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \frac{2 \text{ x } 90}{x^2 - y^2} = \frac{5}{2}$$ [(ii) থেকে $x^2 + y^2 = 90$ বসিয়ে]

বা, $x^2 - y^2 = 72$ ....(iii)

(ii) + (iii) নিলে, $2x^2 = 162$ বা, $x^2 = 81$ বা, $x = \pm 9$

এবং (ii) – (iii) নিলে, $2y^2 = 18$ বা, $y^2 = 9$ বা, $y = \pm 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (9, 3), (9, -3), (-9, 3), (-9, -3)$.

অনুশীলনী ৭.১

সমাধান কর :

১। $(2x + 3)(y - 1) = 14, (x - 3)(y - 2) = -1$

২। $(x - 2)(y - 1) = 3, (x + 2)(2y - 5) = 15.$

৩। $x^2 = 7x + 6y, y^2 = 7y + 6x.$

৪। $x^2 = 3x + 2y, y^2 = 3y + 2x.$

৫। $x + \dfrac{4}{y} = 1, y + \dfrac{4}{x} = 25.$

৬। $y + 3 = \dfrac{4}{x}, x - 4 = \dfrac{5}{3y}.$

৭। $xy - x^2 = 1, y^2 - xy = 2.$

৮। $x^2 - xy = 14, y^2 + xy = 60.$

৯। $x^2 + y^2 = 25, xy = 12.$

১০। $\dfrac{x + y}{x - y} + \dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{10}{3}, x^2 - y^2 = 3.$

১১। $x^2 + xy + y^2 = 3, x^2 - xy + y^2 = 7$

১২। $2x^2 + 3xy + y^2 = 20, 5x^2 + 4y^2 = 41.$

৭.২। দুই চলকবিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোট

পূর্ব অধ্যায়ে এক চলকবিশিষ্ট সূচক সমীকরণের সমাধান নির্ণয় সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। দুই চলকবিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করা সম্পর্কে এখানে আলোচনা করা হল।

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $a^{x+2}. a^{2y+1} = a^{10}, a^{2x}.a^{y+1} = a^9, (a \neq 1)$

সমাধান : $a^{x+2}. a^{2y+1} = a^{10}$ ....(i) $a^{2x}.a^{y+1} = a^9$......................(ii)

(i) থেকে, $a^{x+2y+3} = a^{10}$ বা, $x + 2y + 3 = 10$ বা, $x + 2y - 7 = 0$..............(iii)

(ii) থেকে, $a^{2x+y+1} = a^9$ বা, $2x + y + 1 = 9$ বা, $2x + y - 8 = 0$...............(iv)

(iii) ও (iv) থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতি অনুসারে,

$$\frac{x}{-16+7} = \frac{y}{-14+8} = \frac{1}{1-4}$$

বা, $\dfrac{x}{-9} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{1}{-3}$ বা, $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = 1$ বা, $x = 3, y = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (3, 2)$.

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $3^{3y-1} = 9^{x+y}, 4^{x+3y} = 16^{2x+3}$

সমাধান : এখানে সমীকরণদ্বয় হলো

$3^{3y-1} = 9^{x+y}$ ....(i) এবং $4^{x+3y} = 16^{2x+3}$ ....(ii)

(i) থেকে $3^{3y-1} = (3^2)^{x+y} = 3^{2x+2y}$

$\therefore 3y - 1 = 2x + 2y$ বা, $2x - y + 1 = 0$..............(iii)

(ii) থেকে, $4^{x+3y} = (4^2)^{2x+3}$ বা, $4^{x+3y} = 4^{4x+6}$ বা, $x + 3y = 4x + 6$ বা, $3x - 3y + 6 = 0$

বা, $x - y + 2 = 0$..(iv)

(iii) ও (iv) থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতি অনুসারে,

$$\frac{x}{-2+1} = \frac{y}{1-4} = \frac{1}{-2+1}$$ বা, $\frac{x}{-1} = \frac{y}{-3} = -1$ বা, $x = 1, y = 3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (1, 3)$

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $x^y = y^x, x = 2y.$

সমাধান : এখানে $x^y = y^x$ ....(i) $x = 2y$....................(ii) (যেখানে $x \neq 0, y \neq 0.$)

(i) এ (ii) থেকে x এর মান বসিয়ে পাই, $(2y)^y = y^{2y}$ বা, $2^y. y^y = y^{2y}$

বা, $\frac{y^{2y}}{y^y} = 2^y$ বা, $y^y = 2^y$ $\therefore$ $y = 2.$ (ii) থেকে, $x = 4.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (4, 2).$

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $x^y = y^2, y^{2y} = x^4$

সমাধান : $x^y = y^2$ .... (i); $y^{2y} = x^4$ .... (ii)

(i) থেকে পাই,

$(x^y)^y = (y^2)^y$ বা, $x^{y^2} = y^{2y}$ ....(iii);

(iii) ও (ii) থেকে পাই, $x^{y^2} = x^4$

$\therefore$ $y^2 = 4$ বা, $y = \pm 2.$

এখন $y = 2$ হলে (i) থেকে পাই, $x^2 = 2^2 = 4$ বা, $x = \pm 2$

আবার, $y = -2$ হলে, (i) থেকে পাই, $(x)^{-2} = (-2)^2 = 4$ বা, $\frac{1}{x^2} = 4$ বা, $x^2 = \frac{1}{x^2}$ বা, $x = \pm \frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (2, 2), (-2, 2), (\frac{1}{2}, -2), (-\frac{1}{2}, -2)$

উদাহরণ ৫। সমাধান কর : $8.2^{xy} = 4^y, 9^x.3^{xy} = \frac{1}{27}$

সমাধান : $8.2^{xy} = 4^y$ ....(i); $9^x.3^{xy} = \frac{1}{27}$ ....(ii)

(i) থেকে পাই, $2^3.2^{xy} = (2^2)^y$ বা, $2^{3+xy} = 2^{2y}$ $\therefore$ $3 + xy = 2y$...................(iii)

(ii) থেকে পাই, $(3^2)^x.3^{xy} = \frac{1}{3^3}$ বা, $3^{2x+xy} = 3^{-3}$ $\therefore$ $2x + xy = -3$.................(iv)

(iii) থেকে (iv) বিয়োগ করে পাই, $3 - 2x = 2y + 3$ বা, $-x = y$ ....(v)

(v) থেকে y এর মান (iii) এ বসিয়ে পাই, $3 - x^2 = -2x$

বা, $x^2 - 2x - 3 = 0$ বা, $(x + 1)(x - 3) = 0$

$\therefore$ $x = -1$ অথবা $x = 3$

$x = -1$ হলে (v) থেকে পাই, $y = 1$; $x = 3$ হলে (v) থেকে পাই, $y = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (-1, 1), (3, -3)$

উদাহরণ ৬। সমাধান কর : $18y^x - y^{2x} = 81, 3^x = y^2$

সমাধান : এখানে দেয়া আছে $18y^x - y^{2x} = 81$.....................(i) $3^x = y^2$ ....(ii)

(i) থেকে পাই, $81 + y^{2x} - 18y^x = 0$ বা, $(y^x)^2 - 2.y^x.9 + 9^2 = 0$ বা, $(y^x - 9)^2 = 0$

বা, $y^x - 9 = 0$ বা, $y^x = 9$ বা, $y^x = 3^2$............(iii)

(ii) থেকে পাই, $(3^x)^x = (y^2)^x$ বা, $3^{x^2} = (y^x)^2$ বা, $3^{x^2} = (3^2)^2$ [(iii)- এর মান ব্যবহার করে]

বা, $3^{x^2} = 3^4$ বা, $x^2 = 4$ $\therefore x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ .... (iv)

$x = 2$ (ii) - এ বসিয়ে পাই, $y^2 = 3^2 = 9$ বা, $y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x = -2$ (ii) - এ বসিয়ে পাই, $y^2 = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$ বা, $y = \pm\sqrt{\dfrac{1}{9}} = \pm\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (2, 3), (2, -3), (-2, \frac{1}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$.

অনুশীলনী - ৭.২

সমাধান কর :

১। $2^x + 3^y = 31$
$2^x - 3^y = -23$

২। $3^x = 9^y$
$5^{x+y+1} = 25^{xy}$

৩। $3^x.9^y = 81$
$2x - y = 8$

৪। $2^x.3^y = 18$
$2^{2x}.3^y = 36$

৫। $a^x.a^{y+1} = a^7$
$a^{2y}.a^{3x+5} = a^{20}$

৬। $\left.\begin{array}{l} y^x = x^2 \\ x^{2x} = y^4 \end{array}\right\} y \neq 1$

৭। $y^x = 4$
$y^2 = 2^x$

৮। $4^x = 2^y$
$(27)^{xy} = 9^{y+1}$

৯। $8y^x - y^{2x} = 16$
$2^x = y^2$.

৭.৩। তিন চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোট

দুই চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান প্রতিস্থাপন, অপনয়ন, বজ্রগুণন ও নির্ণায়ক পদ্ধতিতে নির্ণয় করা সম্পর্কে মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তকে আলোচনা করা হয়েছে। এখানে তিন চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় সম্পর্কে আলোচনা করা হবে। এরূপ সমীকরণ জোটের সমাধান করতে সাধারণত একটি চলক অপনয়ন করে দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সমীকরণ নির্ণয় করা হয়। এই সমীকরণ দুইটি সমাধান করে চলক দুইটির মান পাওয়া যায়। সবশেষে ঐ চলক দুইটির প্রাপ্ত মান যে কোনো একটি সমীকরণে প্রতিস্থাপন করলে তৃতীয় চলকটির মান পাওয়া যায়। উল্লেখ্য যে, চলক তিনটি x, y, z হলে এরূপ জোটের কোনো সমাধানকে $(x, y, z) = (a, b, c)$ লিখে প্রকাশ করা হয়, যেখানে সমীকরণগুলোতে x স্থলে a, y স্থলে b এবং z স্থলে c বসালে তাদের উভয়পক্ষ সমান হয়। (a, b, c) কে ক্রম-ত্রয়ী বলা হয় এবং $(x, y, z) = (a, b, c)$ যদি ও কেবল যদি $x = a, y = b$ এবং $z = c$।

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $2x + 3y - z = 10$
$7x + 4y + 5z = 12$
$x - y - 3z = 25$

সমাধান : $2x + 3y - z = 10$ ....(i)
$7x + 4y + 5z = 12$ ....(ii)
$x - y - 3z = 25$ ....(iii)

(i) কে 5 দিয়ে গুণ করে পাই, $10x + 15y - 5z = 50$
(ii) থেকে পাই, $7x + 4y + 5z = 12$

যোগ করে, $17x + 19y = 62$ ....(iv)

(i) কে 3 দিয়ে গুণ করে পাই, $6x + 9y - 3z = 30$

(iii) থেকে পাই, $x - y - 3z = 25$

বিয়োগ করে, $5x + 10y = 5$

বা, $x + 2y = 1$ (v)

(iv) ও (v) থেকে, $17x + 19y - 62 = 0$

$x + 2y - 1 = 0$

বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে, $\frac{x}{-19+124} = \frac{y}{-62+17} = \frac{1}{34-39}$

বা, $\frac{x}{105} = \frac{y}{-45} = \frac{1}{15}$ বা, $\frac{x}{7} = \frac{y}{-3} = 1$ বা, $x = 7, y = -3$.

সমীকরণ (iii) এ x ও y এর মান বসিয়ে পাই, $7 + 3 - 3z = 25$ বা, $z = -5$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y, z) = (7, -3, -5)$.

[বিশেষ দ্রষ্টব্য : বজ্রগুণন সূত্রের প্রমাণের জন্য মাধ্যমিক বীজগণিত দ্রষ্টব্য]

তিন চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের দুইটি সমীকরণ যদি নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়, তবে আমরা বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করতে পারি। মনে করি

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

তখন $\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1}$

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $3x - 4y - 5z = 0$

$5x - 5y + z = 0$

$2x + 3y - 2z = 16$

সমাধান : $3x - 4y - 5z = 0$ ....(i)

$5x - 5y + z = 0$ ....(ii)

$2x + 3y - 2z = 16$ .... (iii)

(i) ও (ii) থেকে বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{-4-25} = \frac{y}{-25-3} = \frac{z}{-15+20} \text{ বা, } \frac{x}{-20} = \frac{y}{-28} = \frac{z}{5} = k \text{ (ধরি)}$$

$\therefore x = -29k, y = -28k, z = 5k$ (iv)

x, y, z এর মানগুলো (iii) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$58k - 84k - 10k = 16$ বা, $-152k = 16$ বা, $k = -\frac{2}{19}$

$\therefore$ (iv) থেকে, $x = \frac{58}{19}$, $y = \frac{56}{19}$, $z = \frac{-10}{19}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y, z) = \left(\frac{58}{19}, \frac{56}{19}, \frac{-10}{19}\right)$

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $x + y + z = a + b + c$

$$ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$$

[a, b, c পরস্পর অসমান অশূন্য ধ্রুবক।]

সমাধান : $x + y + z = a + b + c$ ....(i)

$ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$ ....(ii)

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$ ....(iii)

(i) থেকে পাই, $(x - a) + (y - b) + (z - c) = 0$

(ii) থেকে পাই, $a(x - a) + b(y - b) + c(z - c) = 0$

উপরোক্ত সমীকরণ দুইটিতে $(x - a)$, $(y - b)$ এবং $(z - c)$ কে চলক ধরে বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$\frac{x-a}{c-b} = \frac{y-b}{a-c} = \frac{z-c}{b-a}$ বা, $\frac{x-a}{b-c} = \frac{y-b}{c-a} = \frac{z-c}{a-b} = k$ (ধরি)

$\therefore (x - a) = k(b - c), (y - b) = k(c - a)$ এবং $(z - c) = k(a - b)$ ....(iv)

(iii) থেকে পাই, $(\frac{x}{a} - 1) + (\frac{y}{b} - 1) + (\frac{z}{c} - 1) = 0$ বা, $\frac{x-a}{a} + \frac{y-b}{b} + \frac{z-c}{c} = 0$......(v)

(iv) থেকে $(x - a)$, $(x - b)$ ও $(x - c)$ এর মান (v) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{k(b-c)}{a} + \frac{k(c-a)}{b} + \frac{k(a-b)}{c} = 0$$

বা, $\frac{k}{abc}[bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b)] = 0$

বা, $-\frac{k}{abc}[(a - b)(b - c)(c - a)] = 0$ [$\because$ অনুচ্ছেদ ২.৩ এর চক্রক্রমিক বহুপদীর উৎপাদক : উদা : ২ দ্রষ্টব্য]

$\therefore k = 0$ (কারণ a, b, c পরস্পর অসমান অশূন্য ধ্রুবক)।

সুতরাং (iv) এ $k = 0$ বসিয়ে আমরা পাই,

$x - a = 0, y - b = 0$ এবং $z - c = 0$

বা, $x = a, y = b, z = c$. $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y, z) = (a, b, c)$

অনুশীলনী ৭.৩

১। $x + y + 2z = 3$
$2x + y - z = 5$
$3x + 2y + 5z = 8$

২। $x + y + z = 6$
$x - y + 2z = 3$
$2x - 3y + z = 1$

৩। $2x - y - z = 1$
$x + 3y + z = 6$
$x + y + 2z = 1$

৪। $x + 2y + 5z = 3$
$2x - 3y - 7z = 5$
$4x - 2y + z = 0$

৫। $4x + 6y + z = 25$
$3x + 5y - 2z = 23$
$x + 2y + 3z = 5$

৬। $x + 2y + z = 0$
$x - 2y - 2z = 0$
$3x + y + z = 7$

৭। $8x + 4y - 7z = 0$
$2x - 8y + 5z = 0$
$3x + 2y - 2z = 4$

৮। $3x - 8y + 7z = 0$
$7x - 8y - 5z = 0$
$3x + 4y + 7z = 0$

৯। $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z+4}{5}$
$2x + 3y - 4z = 13$

৭.৪। দুই চলকবিশিষ্ট সরল একঘাত অসমতা

আমরা দুই চলকবিশিষ্ট $ax + by + c = 0$ আকারে সরল সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে শিখেছি (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য)। আমরা দেখেছি যে, এ রকম প্রত্যেক লেখচিত্রই একটি সরল রেখা।

স্থানাঙ্কায়িত x, y সমতলে $ax + by + c = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রের যে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে অর্থাৎ, সমীকরণটির বাম পক্ষে x ও y এর পরিবর্তে যথাক্রমে ঐ বিন্দুর ভুজ ও কোটি বসালে এর মান শূন্য হয়। অন্যদিকে, লেখচিত্রের বাইরে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না অর্থাৎ, ঐ বিন্দুর ভুজ কোটির জন্য $ax + by + c$ এর মান শূন্য অপেক্ষা বড় বা ছোট হয়। সমতলস্থ কোনো বিন্দু P এর ভুজ ও কোটি দ্বারা $ax + by + c$ রাশির x ও y কে যথাক্রমে প্রতিস্থাপন করলে রাশিটির যে মান হয়, তাকে P বিন্দুতে রাশিটির মান বলা হয় এবং উক্ত মানকে সাধারণত $f(P)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। P বিন্দু লেখস্থিত হলে $f(P) = 0$, P বিন্দু লেখচিত্রের বহিঃস্থ হলে $f(P) > 0$ অথবা $f(P) < 0$.

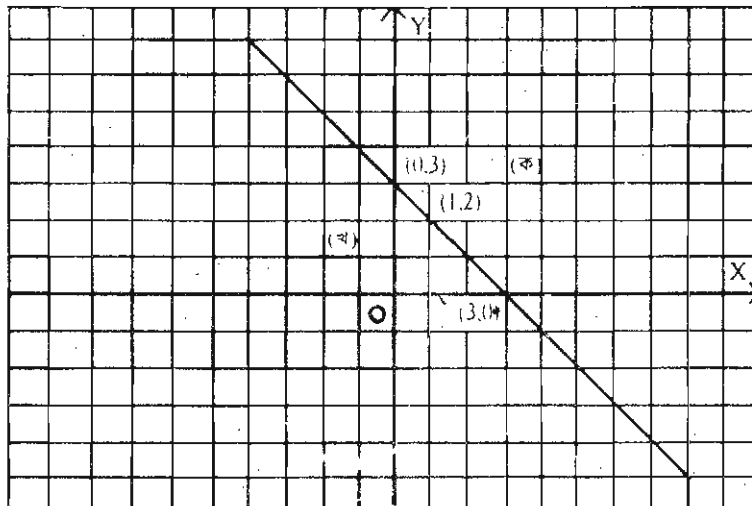
বাস্তবিক লেখচিত্রের পক্ষে বহিঃস্থ সকল বিন্দু লেখ দ্বারা দুইটি অর্ধতলে বিভক্ত হয় : একটি অর্ধতলের প্রত্যেক বিন্দু P এর জন্য, $f(P) > 0$; অপর অর্ধতলের প্রত্যেক বিন্দু P এর জন্য $f(P) < 0$.

বলা বাহুল্য, লেখচিত্রের উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দু P এর জন্য $f(P) = 0$.

উদাহরণ ১। $x + y - 3 = 0$ সমীকরণটি বিবেচনা করি। সমীকরণটি থেকে পাওয়া যায় :

$$y = 3 - x$$

x	0	3	1
y	3	0	2

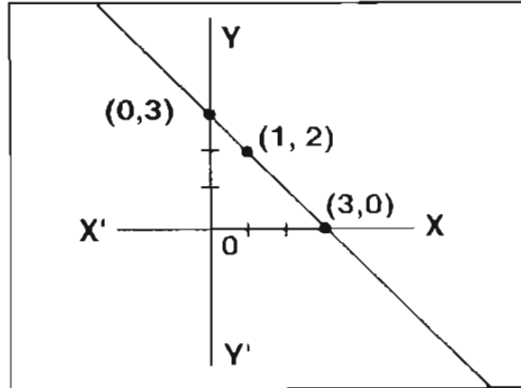
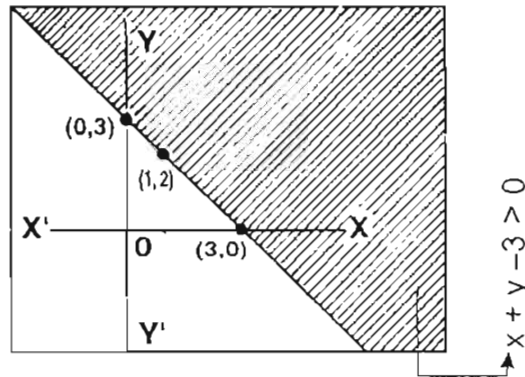
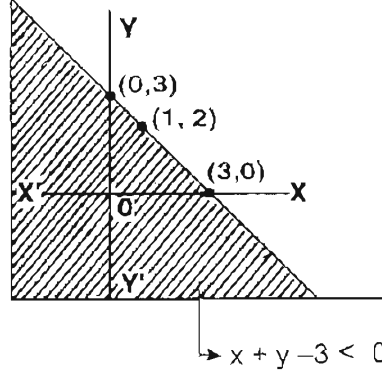
এবং (x, y) সমতলে ছক-কাগজে ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে সমীকরণটির লেখচিত্র নিম্নরূপ হয় :

এই লেখচিত্র রেখা সমগ্র তলটিকে তিনটি অংশে পৃথক করে। যথা :
(১) রেখার (ক) চিহ্নিত পাশের বিন্দুসমূহ,
(২) রেখার (খ) চিহ্নিত পাশের বিন্দুসমূহ, (৩) রেখাস্থিত বিন্দুসমূহ।
এখানে (ক) চিহ্নিত অংশকে লেখ-রেখার "উপরের অংশ" ও (খ) চিহ্নিত অংশকে লেখ-রেখার "নিচের অংশ" বলা যায়।

দুই চলকবিশিষ্ট অসমতার লেখচিত্র

উদাহরণ ২। $x + y - 3 > 0$ অথবা $x + y - 3 < 0$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান। উপরিউক্ত অসমতাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করতে প্রথমেই ছক কাগজে $x + y - 3 = 0$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$x + y - 3 = 0$ সমীকরণ থেকে পাই,

x	0	3	1
y	3	0	2

$x + y - 3 > 0$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য উক্ত অসমতায় মূলবিন্দু $(0, 0)$ এর মান বসালে আমরা পাই $-3 > 0$ যা সত্য নয়। কাজেই, অসমতার ছায়াচিত্র হবে $x + y - 3 = 0$ সমীকরণের রেখার যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে তার বিপরীত পাশে।

$x + y - 3 < 0$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কনের উক্ত অসমতায় মূলবিন্দু $(0, 0)$ এর মান বসালে পাওয়া যায় $-3 < 0$, যা অসমতাকে সিদ্ধ করে বা মান সত্য। কাজেই, এ অবস্থায় অসমতার ছায়াচিত্র হবে রেখাটির যে পার্শে মূলবিন্দু রয়েছে সে পার্শ্বে।

উদাহরণ ৩। $2x - 3y + 6 \geq 0$ অসমতার সমাধান সেটের বর্ণনা দাও ও চিত্রিত কর।

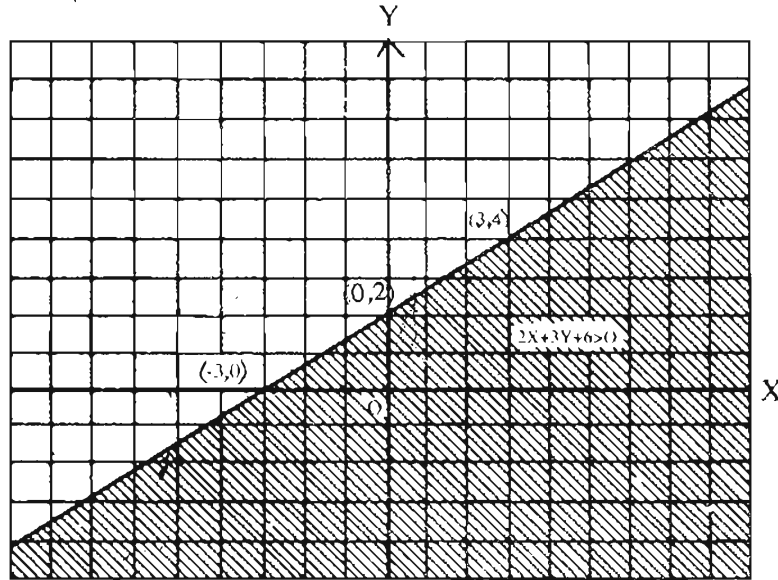
সমাধান : আমরা প্রথমে $2x - 3y + 6 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি।

সমীকরণটি থেকে পাওয়া যায় :

$3y = 2x + 6$ বা, $y = \frac{2x}{3} + 2.$

এ লেখচিত্রস্থিত কয়েকটি স্থানাঙ্ক :

x	0	–3	3
y	2	0	4

স্থানাঙ্কায়িত ছক-কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(0, 2)$, $(-3, 0)$ $(3, 4)$ বিন্দুগুলো চিত্র স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

এখন মূলবিন্দু $(0, 0)$ তে $2x - 3y + 6$ রাশির মান 6, যা ধনাত্মক। সুতরাং লেখচিত্র রেখাটির যে পার্শে মূলবিন্দু রয়েছে সেই পার্শের সকল বিন্দুর জন্যই $2x - 3y + 6 > 0$

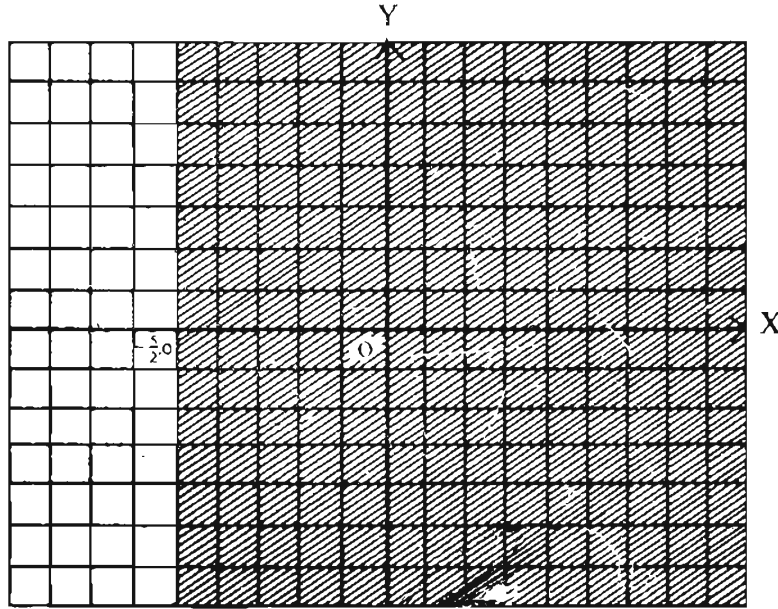
অতএব, $2x - 3y + 6 \geq 0$ অসমতার সমাধান-সেট $2x - 3y + 6 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রস্থিত সকল বিন্দুর এবং লেখচিত্রের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমন্বয়ে গঠিত।

এই সমাধান সেটের লেখচিত্র উপরের চিত্রের চিহ্নিত অংশটুকু যার মধ্যে লেখচিত্র রেখাটিও অন্তর্ভুক্ত।

উদাহরণ ৪। (x, y) সমতলে, $-2x < 5$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : $-2x < 5$ অসমতাটিকে এভাবে লেখা যায়।

$$2x + 5 > 0 \text{ বা, } 2x > -5 \text{ বা, } x > -\frac{5}{2}$$

এখন স্থানাঙ্কায়িত (x, y) সমতলে $x = -\frac{5}{2}$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে $(-\frac{5}{2}, 0)$ বিন্দু দিয়ে y অক্ষের সমান্তরাল করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হল।

এই লেখচিত্র রেখার ডান পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত এবং মূলবিন্দুতে $x = 0$ যা, $> -\frac{5}{2}$

সুতরাং লেখচিত্র-রেখার ডান পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কই প্রদত্ত অসমতার সমাধান (লেখচিত্র-রেখার বিন্দুগুলো বিবেচ্য নয়)। সমাধান সেটের লেখচিত্র উপরের চিত্রের চিহ্নিত অংশটুকু (যার মধ্যে লেখচিত্র রেখাটি অন্তর্ভুক্ত নয়)।

উদাহরণ ৫। $y \leq 2x$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : $y \leq 2x$ অসমতাটিকে

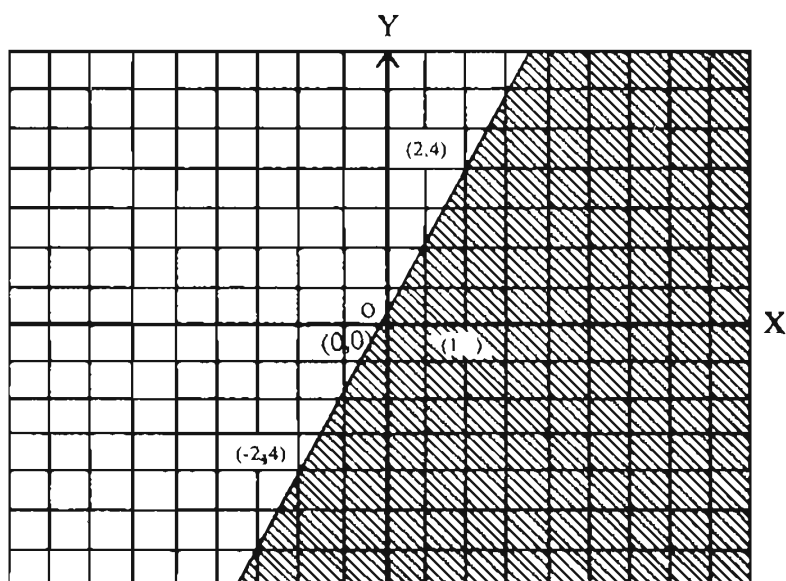
$y - 2x \leq 0$ আকারে লেখা যায়।

এখন $y - 2x = 0$

বা, $y = 2x$

সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	0	2	–2
y	0	4	–4

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (0, 0), (2, 4) (–2, –4) বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হল।

(1, 0) বিন্দুটি লেখচিত্র রেখার "নিচের অংশে" আছে। এই বিন্দুতে

$y - 2x = 0 - 2 \times 1 = -2 < 0.$

সুতরাং লেখচিত্র রেখাটি ও তার নিচের অংশ (অর্থাৎ, যে অংশে (1, 0) বিন্দুটি অবস্থিত) সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

উদাহরণ ৬। $2x - 3y - 1 \geq 0$ এবং $2x + 3y - 7 \leq 0$ অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধান চিহ্নিত কর।

সমাধান : প্রথমে $2x - 3y - 1 = 0$ (1)

এবং $2x + 3y - 7 = 0$ (2)

সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

(১) থেকে পাই,

$3y = 2x - 1$ বা, $y = \dfrac{2x-1}{3}$

এখানে,

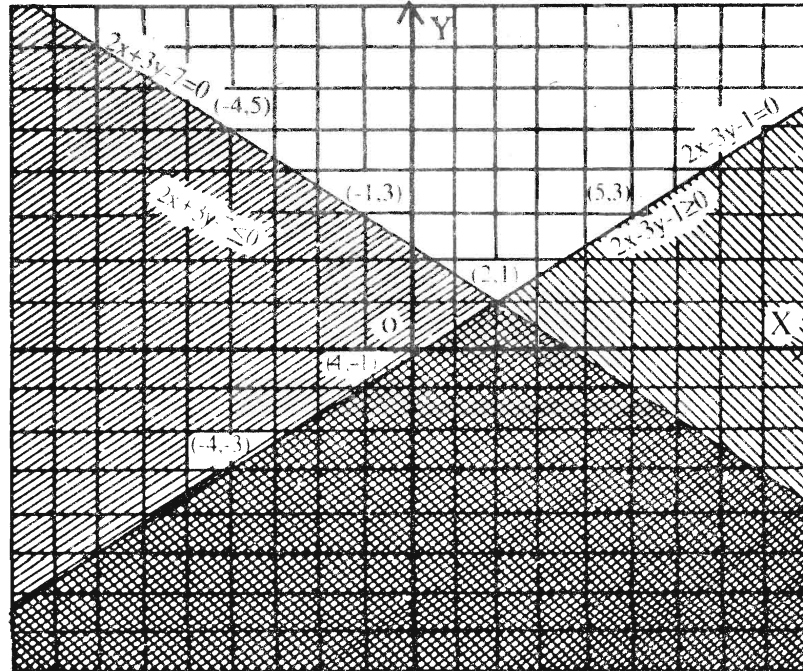
x	5	–4	–1
y	3	–3	–1

(২) থেকে পাই, $3y = -2x + 7$

বা, $y = \dfrac{-2x+7}{3}$

এখানে,

x	–1	2	–4
y	3	1	5

এখন স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (5, 3), (–4, –3), (–1, –1) বিন্দুগুলো স্থাপন করে $2x - 3y - 1 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র রেখা এবং (–1, 3), (2, 1), (–4, 5) বিন্দুগুলো স্থাপন করে $2x + 3y - 7 =$ সমীকরণের লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।

মূলবিন্দু $(0, 0)$ তে $2x - 3y - 1$ রাশির মান -1, যা ঋণাত্মক। সুতরাং $2x - 3y - 1 = 0$ এর লেখচিত্র রেখার যে পার্শে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই পার্শের সকল বিন্দুর জন্য $2x - 3y - 1 < 0$ এবং অপর পার্শের সকল বিন্দুর $2x - 3y - 1 \geq 0$. অতএব, লেখচিত্র রেখাটিসহ তার "নিচে" সমতলের চিহ্নিত অংশ $2x - 3y - 1 > 0$ অসমতার লেখচিত্র। আবার, $(0, 0)$ তে $2x - 3y - 7$ রাশির মান -7, যা ঋণাত্মক। সুতরাং $2x + 3y - 7 = 0$ এর লেখচিত্র রেখার যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $2x + 3y - 7 < 0$. অতএব, লেখচিত্র রেখাটিসহ তার "নিচে" সমতলের চিহ্নিত অংশ $2x + 3y - 7 \leq 0$ অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশ্লিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতার দুইটির যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই (সীমারেখাসহ) এই লেখচিত্র।

অনুশীলনী ৭.৪

১। নিম্নের প্রত্যেক অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর :

(i) $x - y > -10$; (ii) $2x - y < 6$;

(iii) $3x - y \geq 0$; (iv) $3x - 2y \leq 12$;

(v) $y < -2$; (vi) $x \geq 4$;

(vii) $y > x + 2$ (viii) $y < x + 2$.

(ix) $y \geq 2x$; (x) $x + 3y < 0$.

২। নিচের প্রত্যেক অসমতাযুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর :

(i) $x - 3y - 6 < 0$ এবং $3x + y + 2 < 0$;

(ii) $x + y - 4 \leq 0$ এবং $2x - y - 3 \geq 0$;

(iii) $x - y + 3 > 0$ এবং $2x - y - 6 \geq 0$;

(iv) $x + y - 3 > 0$ এবং $2x - y - 5 > 0$;

(v) $x + 2y - 4 > 0$ এবং $2x - y - 3 > 0$;

(vi) $5x + 2y > 11$ এবং $7x - 2y > 3$;

(vii) $3x - 3y > 5$ এবং $x + 3y \leq 9$;

(viii) $5x - 3y - 9 > 0$ এবং $3x - 2y \geq 5$.

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। $3^x.9^y = 81$
$2x - y = 8$
উপরের সমীকরণ জোটের সমাধান (x, y) নিচের কোনটি ?

ক. (4, 0) খ. (0, 4)
গ. (–4, 0) ঘ. (0, –4)

২। $x^y = y^x$ এবং $x = 2y$ সমীকরণ জোটের সমাধান (x, y) = কত?

ক. (4, 2) খ. (0, 0)
গ. (–2, 4) ঘ. (–4, –2)

নিম্নের তথ্যের আলোকে ৩-৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
$y^x = 4$
$y^2 = 2^x$

৩। দ্বিতীয় সমীকরণে $y = 4$ হলে x = কত?

ক. 3 খ. 2
গ. 4 ঘ. ± 2

৪। সমীকরণ জোটটি

i. দুই চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট
ii. দুই চলক বিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোট
iii. দুই চলক বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোট

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii
গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

৫। সমীকরণ জোটটির সমাধান (x, y) = কত?

ক. $(2, \pm\frac{1}{2}), (-2, \pm\frac{1}{2})$
খ. $(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)$
গ. $(-\frac{1}{2}, -2), (2, -\frac{1}{2})$
ঘ. $(2, -\frac{1}{2}), (-2, -\frac{1}{2})$

সৃজশীল প্রশ্নাবলী
(৬ষ্ঠ ও ৭ম অধ্যায়)

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। 2, 3, 4 এবং 6 এর সাথে চলক x এর বিয়োগফলসমূহের ক্ষেত্রে তৃতীয় ও প্রথমটির অনুপাত হলো চতুর্থ ও দ্বিতীয়টির অনুপাত অপেক্ষা বড়।

ক. উল্লিখিত তথ্যকে গাণিতিক অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর। এক্ষেত্রে $x = 2$ হলে অসমতাটির কিরূপ হবে?

খ. উপস্থাপিত অসমতাটির সমাধান সেট নির্ণয় কর এবং সংখ্যারেখায় প্রদর্শন কর।

গ. যদি চতুর্থ বিয়োগফলের পরমমান প্রথম বিয়োগফলের পরমমানের দ্বিগুণের সমান হয় তবে গঠিত সমীকরণটির সমাধান কর।

২। $(1+x)$ এবং $(1-x)$ রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকের ঘনমূলের সমষ্টি হলো 2 এর ঘনমূলের সমান।

ক. 27 এর ঘনমূল কত? উপরোল্লিখিত তথ্যের আলোকে একটি সমীকরণ তৈরি কর।

খ. গঠিত সমীকরণের সমাধান সেট উপস্থাপন কর।

গ. 4 এর $(1+x)$ তম ঘাত এবং $(1-x)$ তম ঘাত নেওয়া হলে এদের সমষ্টি 10 এর সমান হয়। সমীকরণ গঠন পূর্বক সমাধান কর এবং শুদ্ধি পরীক্ষা দেখাও।

৩। x ও y দুইটি চলরাশির ক্ষেত্রে $x > y > o$ এবং $x \geq 2y$ এছাড়া y এর x তম ঘাত হলো 4 এবং 2 এর x তম ঘাত হলো y এর বর্গের সমান।

ক. উল্লিখিত তথ্যের আলোকে সমীকরণ দুইটি গঠন কর।

খ. সমীকরণ জোটের সমাধান কর।

গ. $x \geq 2y$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

অষ্টম অধ্যায়

অনন্ত ধারা

৮.১। অনুক্রম (Sequence)

1 2 3 4 5 ....n ....

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

2 4 6 8 10........2n ....

উপরের বর্ণনায় লক্ষ করি যে, প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা n এর সঙ্গে একটি অনন্য সংখ্যা 2n সংশ্লিষ্ট করা হয়েছে। এতে স্বাভাবিক সংখ্যা সেট N থেকে যোগবোধক জোড় সংখ্যা সেট এ একটি ফাংশন বর্ণিত হয়েছে। এই ফাংশনের অধীনে 1, 2, 3, 4, 5 ইত্যাদি সকল স্বাভাবিক সংখ্যার প্রতিচ্ছবিগুলোকে ক্রমান্বয়ে পরপর লিখে 2, 4, 6, 8, 10, ... অনুক্রমটি পাওয়া যায়। এখানে "......." দ্বারা "এরূপ অন্তহীন ভাবে চলতে থাকবে" নির্দেশ করা হয়েছে। সাধারণভাবে, $u : N \rightarrow S$ কোনো ফাংশন হলে প্রত্যেক $n \in N$ এর জন্য একটি অনন্য $u(n) \in S$ নির্দিষ্ট হয়। অনেক সময় $u(n)$ স্থলে u_n (একে u -সাব -n পড়া হয়) লেখা হয়। এই u_n উপাদানগুলোকে ক্রমান্বয়ে u_1, u_2, u_3, ..., u_n,....... লিখে এরা S সেটে একটি অনুক্রম বর্ণনা করে বলা হয়। u_n কে এই অনুক্রমের n তম পদ বলা হয়।

উদাহরণ ১। 2, 4, 6, 10 .... 2n, ...

অনুক্রমের ১ম পদ $u_1 = 2$, ২য় পদ $u_2 = 4$, ৩য় পদ $u_3 = 6$ ইত্যাদি। সাধারণভাবে, n তম পদ $u_n = 2n$.

মন্তব্য। এখানে u প্রতীকের কোনো বিশেষত্ব নেই। u স্থলে v, t, x, f, A ইত্যাদি যে কোনো প্রতীক ব্যবহার করা যেতে পারে।

উদাহরণ ২। 1, 3, 5, 7, 9, ... অনুক্রমের 15 তম পদ, 1000 তম পদ এবং k তম পদ উল্লেখ কর।

সমাধান : লক্ষ করি যে, 1, 3, 5, 7, 9, ... একটি সমান্তর প্রগমন যার প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অন্তর 2. সুতরাং k তম পদ $t_k = 1 + (k-1)2 = 2k-1$ (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক : নবম অধ্যায় দ্রষ্টব্য)

$k = 15$ ধরে 15 তম পদ $t_{15} = 2 \times 15 - 1 = 29$

1000 তম পদ $t_{1000} = 2 \times 1000 - 1 = 1999$.

৮.২ অনন্ত ধারা (Infinite series)

সংজ্ঞা : $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$, ... বাস্তব সংখ্যার একটি অনুক্রম হলে $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ কে বাস্তব সংখ্যার একটি অনন্ত ধারা (Infinite series) এবং u_n কে এই ধারার n তম পদ বলা হয়।

উদাহরণ ১। নিচের প্রত্যেকটি অনন্ত ধারা :

(ক) $1 + 2 + 3 + 4 + ...$ (খ) $1 - 1 + 1 - 1 + ...$

(গ) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ প্রত্যেক অনন্ত ধারার আংশিক সমষ্টি (Partial sum) নির্ণয় করা যায়।

সংজ্ঞা : $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ অনন্ত ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = u_1$, ২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = u_1 + u_2$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$ ইত্যাদি। এভাবে n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n$. অর্থাৎ, কোন অনন্ত ধারার n তম আংশিক সমষ্টি হচ্ছে ধারাটির প্রথম n সংখ্যক (যেখানে $n \in N$) পদের সমষ্টি।

উদাহরণ ২। $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots$ ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = 1$

২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = 1 + 2 = 3$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

....

....

n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক : নবম অধ্যায় দ্রষ্টব্য)।

দ্রষ্টব্য ১। উপরের উদাহরণে লক্ষ করি,

$$S_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55; \; S_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

$$S_{1000} = \frac{1000 \times 1001}{2} = 500500$$

$S_{10000} = \frac{10000 \times 10001}{2} = 50005000$ ইত্যাদি। এখানে n যত বড় হয় S_n এর মান তত বড় হয়। n এর মান যথেষ্ট বড় করে S_n এর মান যথেষ্ট বড় করা যায়। এক্ষেত্রে বলা হয় যে, $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots$ ধারাটির কোনো সমষ্টি নেই।

উদাহরণ ৩। $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = 1$

২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = 0$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = 1$

৪র্থ আংশিক সমষ্টি $S_4 = 0$ ইত্যাদি। এভাবে অগ্রসর হয়ে দেখা যায় যে,

বিজোড় n এর জন্য n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 1$ এবং জোড় n এর জন্য n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 0$.

দ্রষ্টব্য ২। উপরের উদাহরণে এমন একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা পাওয়া যায় না যাকে ধারাটির সমষ্টি বলা যায়।

উদাহরণ ৪। $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots$ ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = 1$,

২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = 1+\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$

....

....

n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$

এখানে S_n একটি ধারা যার প্রথম পদ $a = 1$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{2}$.

সুতরাং $S_n = \dfrac{1(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক : নবম অধ্যায় দ্রষ্টব্য)

দ্রষ্টব্য ৩। উপরের উদাহরণে লক্ষ করি যে, $n = 10$ হলে $\frac{1}{2^{n-1}} = (\frac{1}{2})^9 \approx 1.95 \times 10^{-3}$

$n = 100$ হলে $\frac{1}{2^{n-1}} = (\frac{1}{2})^{99} \approx 1.58 \times 10^{-30}$ ইত্যাদি। অর্থাৎ, n কে যথেষ্ট বড় করে $\frac{1}{2^{n-1}}$ যথেষ্ট ছোট করা যায়। তখন S_n এর মান 2 এর যথেষ্ট কাছাকাছি হয়। এ আলোচনা থেকে বলা হয় যে, আংশিক সমষ্টিগুলোর প্রান্তীয় মান (limiting value) 2। এই প্রান্তীয় মানকেই অনন্ত ধারাটির সমষ্টি বলা হয় এবং $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 2$ লিখে করা হয়।

সংজ্ঞা। অনন্ত ধারা $u_1 + u_2 + u_3 + ...$

যদি এমন হয় যে যথেষ্ট বড় n এর জন্য ধারাটির আংশিক সমষ্টি $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ...u_n$ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা s এর যথেষ্ট কাছাকাছি হয়, তবে s কে অনন্ত ধারাটির সমষ্টি বলা হয়।

৮.৩। অনন্ত গুণোত্তর ধারা

গুণোত্তর ধারার সঙ্গে আমরা আগেই পরিচিত হয়েছি (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য)। আমরা দেখেছি যে, $a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$ একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r। পদগুলোকে $u_1, u_2, u_3,$ ইত্যাদি ধরে দেখা যায় যে, $u_1, = a, u_2 = ar, u_3 = ar_2$ ইত্যাদি এবং সাধারণভাবে $u_n = ar^{n-1}$ $(n \in N), r \neq 1$ হলে, এই গুণোত্তর ধারার n তম আংশিক সমষ্টি

$$\boxed{S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.}$$

লক্ষ করি,

(1) $|r| < 1$ হলে, অর্থাৎ, $-1 < r < 1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে $|r^n|$ এর মান হ্রাস পায় এবং n কে যথেষ্ট বড় করে $|r^n|$ এর মানকে যথেষ্ট ছোট করা যায় অর্থাৎ, 0 এর যথেষ্ট কাছাকাছি আনা যায়। এ থেকে বলা যায় যে, $|r| < 1$ হলে r^n এর প্রান্তীয় মান 0 হয় এবং ফলে,

$Sn = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$ এর প্রান্তীয় মান $S = \frac{a}{1-r}$ হয়।

সুতরাং এক্ষেত্রে $a + ar + ar^2 + ...$ অনন্ত ধারার সমষ্টি $\boxed{S = \frac{a}{1-r}}$

(২) $|r| > 1$ হলে অর্থাৎ, $r > 1$ অথবা $r < -1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে $|r^n|$ এর মান বৃদ্ধি পায় এবং n কে যথেষ্ট বড় করে $|r^n|$ এর মানকে যথেষ্ট বড় করা যায়। এ থেকে দেখা যায় যে, এমন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা S পাওয়া যায় না যাকে S_n এর প্রান্তীয় মান (যখন n অনির্ধারিত ভাবে বড় হয়) ধরা যায়। অর্থাৎ, এক্ষেত্রে অনন্ত ধারাটির কোনো সমষ্টি নেই।

(৩) $r = -1$ হলেও S_n এর কোনো প্রান্তীয় মান (যখন n অনির্ধারিত ভাবে বড় হয়) পাওয়া যায় না, কেননা $(-1)^n$ এর মান -1 (যখন n বিজোড়) এবং 1(যখন n জোড়) এর মধ্যে দোদুল্যমান হয়। সুতরাং এক্ষেত্রেও অনন্ত ধারাটির কোনো সমষ্টি নেই;

উপরের আলোচনা থেকে দেখা যায় যে,

প্রতিজ্ঞা। যদি $|r| < 1$ অর্থাৎ, $-1 < r < 1$ হয়, তবে অনন্ত গুণোত্তর ধারা

$a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$ এর সমষ্টি $S = \frac{a}{1-r}$. r এর অন্য সকল মানের জন্য অনন্ত ধারাটির কোনো সমষ্টি নেই।

মন্তব্য : অনন্ত গুণোত্তর ধারার সমষ্টি (যখন থাকে) কে অনেক সময় S লিখে প্রকাশ করা হয় এবং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি (sum up to infinity) বলা হয়।

অর্থাৎ, $S = a + ar^2 + ar^3 + ...$ অসীমতক $= \frac{a}{1-r}$, যখন $|r| < 1$.

উদাহরণ ১। নিম্নোক্ত অনন্ত গুণোত্তর ধারাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর :

(ক) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...$ (খ) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ...$ (গ) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3} - \frac{8}{5^4} + ...$

সমাধান : (ক) এখানে $a = 1$ এবং $r = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

(খ) এখানে $a = \frac{1}{3}$ এবং $r = \frac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

(গ) এখানে $a = \frac{1}{5}$ এবং $r = -\frac{2}{5}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{5}}{1-(-\frac{2}{5})} = \frac{1}{7}$

পৌনঃপুনিক দশমিকের সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর

উদাহরণ ২। নিম্নের পৌনঃপুনিক দশমিকগুলোকে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

(ক) $\cdot\dot{5}$ (খ) $\cdot\dot{2}\dot{7}$ (গ) $2\cdot3\dot{7}$ (ঘ) $1\cdot\dot{3}0\dot{5}$

সমাধান: (ক) $\cdot\dot{5} = \cdot55 .... = \cdot5 + \cdot05 + \cdot005 + ...$

যা একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ $a = \cdot 5$ সাধারণ অনুপাত $r = \cdot 1$

$$\therefore \cdot\dot{5} = \frac{a}{1-r} = \frac{\cdot 5}{1-(\cdot 1)} = \frac{\cdot 5}{\cdot 9} = \frac{5}{9}.$$

(খ) $\cdot\dot{2}\dot{7} = \cdot 272727 .... = \cdot 27 + \cdot 0027 + \cdot 000027 + ...,$

যা একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা যার ১ম পদ $a = \cdot 27$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \cdot 01$

$$\therefore \cdot\dot{2}\dot{7} = \frac{a}{1-r} = \frac{\cdot 27}{1-(.01)} = \frac{\cdot 27}{\cdot 99} = \frac{3}{11}.$$

(গ) $2\cdot\dot{3}\dot{7} = 2\cdot 373737 .... = 2 + (\cdot 37 + \cdot 0037 + \cdot 000037 + ...)$

এখানে বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা যার ১ম পদ $a = \cdot 37$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \cdot 01$

$$\therefore 2\cdot\dot{3}\dot{7} = 2 + \frac{a}{1-r} = 2 + \frac{\cdot 37}{1-(.001)} = 2 + \frac{\cdot 37}{\cdot 99} = 2 + \frac{37}{99} = \frac{235}{99}$$

(ঘ) $1\cdot\dot{3}0\dot{5} = 1\cdot 305305 ..... = 1 + (\cdot 305 + \cdot 000305 + ...)$

এখানে বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা যার ১ম পদ $a = \cdot 305$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \cdot 001$

$$\therefore 1\cdot\dot{3}0\dot{5} = 1 + \frac{a}{1-r} = 1 + \frac{\cdot 305}{1-(\cdot 001)} = 1 + \frac{\cdot 305}{\cdot 999} = 1 + \frac{305}{999} = \frac{1305}{999}.$$

অনুশীলনী ৮

১। প্রদত্ত অনুক্রমের 10 তম পদ 15 তম পদ এবং r তম পদ নির্ণয় কর :

(ক) 1, 3, 5, 7, 9, ..., (খ) 3, 5, 7, 9, ...

(গ) অনুক্রমটির n তম পদ হল $\frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbf{N}$; (ঘ) 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...

(ঙ) $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \frac{4}{81}, ...$; (চ) অনুক্রমটির n তম পদ হল $\frac{1-(-1)^n}{2}$

২। একটি অনুক্রমের n তম পদ হল $u_n = \frac{1}{n}$

(ক) $u_{10}, u_{100}, u_{1000}$ নির্ণয় কর।

(খ) $u_n < 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?

(গ) u_n এর প্রান্তীয় মান (যখন n যথেষ্ট বড় হয়) সম্পর্কে কী বলা যায়?

৩। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে, $r \neq 1$ হলে গুণোত্তর ধারা

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ এর n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

৪। প্রদত্ত অনন্ত গুণোত্তর ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে তবে তা নির্ণয় কর :

(ক) $12 + 4 + \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{9} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(খ) $1 + \cdot 1 + \cdot 01 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(গ) $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

৫। x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

অনন্ত ধারার (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

৬। প্রদত্ত পৌনঃপুনিক দশমিককে মূলদ ভগ্নাংশ রূপে প্রকাশ কর :

(ক) $\cdot\dot{4}$ (খ) $\cdot\dot{1}\dot{2}$ (গ) $\cdot 0\dot{1}\dot{2}\dot{3}$ (ঘ) $8\cdot\dot{5}\dot{1}$ (ঙ) $1\cdot\dot{2}\dot{3}\dot{1}$ (চ) $6\cdot\dot{4}0\dot{5}$

বহুনির্বাচনীও সৃজনশীল প্রশ্নাবলী

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। 3, 5, 7, 9, ... অনুক্রমের 10 তম পদ কত?

ক. 15 খ. 21

গ. 24 ঘ. 18

২। একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ $\frac{1}{5}$ এবং অসীমতক সমষ্টি $\frac{1}{7}$ হলে ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?

ক. $\frac{5}{2}$ খ. $\frac{2}{5}$

গ. $-\frac{2}{5}$ ঘ. $-\frac{5}{2}$

৩। i. 1 – 1 + 1 – 1 + 1 .... ধারার n তম আংশিক সমষ্টি 1; যখন n বিজোড়।

ii. 2 – 2 + 2 – 2 + 2.................... ধারার n তম আংশিক সমষ্টি 2; যখন n জোড়।

iii. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ .... ধারার তৃতীয় আংশিক সমষ্টি $\frac{7}{4}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিম্নের তথ্যের আলোকে ৪-৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$\frac{1}{(2x+1)}+\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^3}+\ldots\ldots$$

৪। ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি

ক. $\left|\frac{1}{2x+1}\right| > ০$

খ. $\frac{1}{|2x+1|} < ০$

গ. $|2x+1| < ০$

ঘ. $|2x+1| \geq ০$

৫। x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে?

ক. x < –1 অথবা x > 0

খ. x < 0 অথবা x >1

গ. x < 1 অথবা x > 0

ঘ. –1 < x < 0

৬। $x = 1$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?

ক. $\frac{1}{2}$ খ. 2

গ. -2 ঘ. $-\frac{1}{2}$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। $(1+y)^{-1} + (1+y)^{-2} + (1+y)^{-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ একটি অনন্ত ধারা

ক. উপরের ধারাটি কোন ধরনের? ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

খ. $Y = -\frac{1}{3}$ হলে ধারাটি নির্ণয় কর। ধারাটি দশতম পদ এবং প্রথম বারটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. Y এর কোন শর্ত সাপেক্ষে প্রদত্ত ধারাটি অসীমতক সমষ্টি থাকবে? সেই সম্পর্কটি নির্ণয় কর।

২। $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ একটি অনন্ত ধারা :

ক. প্রদত্ত অনন্ত ধারাটি কোন ধরনের ? প্রদত্ত ধারাটির তৃতীয় আংশিক সমষ্টি কত ?

খ. প্রদত্ত ধারাটির বিশতম পদ এবং প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. $x = -\frac{1}{2}$ হলে প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $\frac{1}{x+1}$ হয়। এক্ষেত্রে ধারাটির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ লিখে অনন্ত ধারাটি গঠন কর। x- এ উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর।

নবম অধ্যায়

পরিসংখ্যান

৯.১। পরিসংখ্যান

দৈনন্দিন জীবনে আমরা বিভিন্ন রকম তথ্যসূচক সংখ্যার সম্মুখীন হই। এ সকল তথ্যসূচক সংখ্যা কোনো দেশের জনসংখ্যা, নারী-পুরুষের সংখ্যা, ব্যবসা-বাণিজ্যের লাভ-লোকসান, বৃষ্টিপাত, তাপমাত্রা ইত্যাদি তথ্য বুঝাতে পারে। যেমন, পৃথিবীর কয়েকটি বড় বড় শহরের ডিসেম্বর মাসের কোনো একদিনের সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ তাপমাত্রার তালিকা দেওয়া হল :

শহরের নাম	সর্বনিম্ন তাপমাত্রা	সর্বোচ্চ তাপমাত্রা
১. ঢাকা	২১·১° সে ঃ	২৭·৪° সে ঃ
২. কলকাতা	২২·২° সে ঃ	২৮·৯° সে ঃ
৩. বোম্বে	২৬·৩° সে ঃ	৩২·৭° সে ঃ
৪. টোকিও	৮·২° সে ঃ	১৭·৮° সে ঃ
৫. লন্ডন	১১·৪° সে ঃ	২১·৫° সে ঃ
৬. নিউইয়র্ক	৭·৬° সে ঃ	১৮·০° সে ঃ
৭. দুবাই	২৭·১° সে ঃ	৩৭·৭° সে ঃ

এ সংখ্যাসূচক তথ্য থেকে ঐ দিন কোনো শহরে কী রকম শীত পড়েছিল তার একটি তুলনামূলক চিত্র পাওয়া যায়। এ তথ্যের উপর ভিত্তি করে টোকিওগামী একজন যাত্রী তার কী রকম পোশাক পরিচ্ছদের প্রয়োজন সে সম্পর্কে একটি ধারণা পেতে পারেন এবং তদনুযায়ী ব্যবস্থা গ্রহণ করতে পারেন। সুতরাং বিভিন্ন বিষয় বা ঘটনার সংখ্যাসূচক তথ্য কীভাবে পাওয়া যায় এবং কীভাবে ব্যবহার করতে হয় সে সম্বন্ধে ধারণা থাকা প্রয়োজন।

উপরে বর্ণিত তথ্যসূচক সংখ্যামালা একটি পরিসংখ্যান। তাপমাত্রা নির্দেশক সংখ্যাগুলো এই পরিসংখ্যানের উপাত্ত (Data)।

কোনো "ঘটনা" সম্পর্কিত সংখ্যামানের তথ্যাদিকে ঐ ঘটনার পরিসংখ্যান বলা হয়।

পরিসংখ্যানে বর্ণিত তথ্যাদি যে সংখ্যাগুলোর মাধ্যমে প্রকাশিত হয় তাদের ঐ পরিসংখ্যানের উপাত্ত বলা হয়। সাধারণত কোনো ঘটনা অনুসন্ধান করে এরূপ উপাত্ত সংগ্রহ করা হয়।

বিভিন্ন উপাত্ত সংগ্রহ, বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যা প্রদানের জন্য যে পদ্ধতি ও কলাকৌশল ব্যবহার করা হয়, তাকে পরিসংখ্যান পদ্ধতি বলা হয়।

পরিসংখ্যানের বৈশিষ্ট্য : পরিসংখ্যানের কতকগুলো মৌলিক বৈশিষ্ট্য হল :

১। পরিসংখ্যান সংখ্যায় প্রকাশিত তথ্য : পরিসংখ্যানের উপাত্তসমূহ সংখ্যায় প্রকাশ করতে হয়। গুণবাচক তথ্য পরিসংখ্যান নয়।

২। পরিসংখ্যান উপাত্তের সমষ্টি : কোনো বিচ্ছিন্ন সংখ্যাকে পরিসংখ্যান বলা যায় না। যেমন, একজন ছাত্রের ওজন ৫০

কেজি বলা হলে পরিসংখ্যান হয় না। কিন্তু একদল ছাত্রের গড় ওজন ৫০ কেজি বলা হলে পরিসংখ্যান হয়। কারণ, এটি একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের কতকগুলো সংখ্যার গড়।

৩। পরিসংখ্যান নির্দিষ্ট উদ্দেশ্য সম্পর্কিত : পরিসংখ্যানের উদ্দেশ্য সুস্পষ্ট ও পূর্ব নির্ধারিত হতে হয়। উদ্দেশ্য অনুযায়ী পরিসংখ্যানে উপাত্তসমূহ সংগ্রহ করতে হয়।

৪। পরিসংখ্যান তুলনাযোগ্য ও বিভিন্ন গ্রুপে বিন্যাসযোগ্য তথ্য : পরিসংখ্যান উপাত্ত এমনভাবে সংগ্রহ করতে হয় যেন তাদের মধ্যে তুলনা করা যায় এবং গ্রুপে বিন্যাস করা যায়। যেমন, কয়েকজন ছাত্রের উচ্চতা তুলনা করা যায় এবং একইভাবে কোনো জেলার কয়েকদিনের তাপমাত্রা তুলনা করা যায়।

৯.২। পরিসংখ্যান উপাত্ত সংগ্রহ ও উপস্থাপন

পরিসংখ্যান উপাত্ত দুই ধরনের। যেমন, (১) প্রাথমিক উপাত্ত (২) মাধ্যমিক উপাত্ত।

প্রাথমিক উপাত্ত : অনুসন্ধানকারী বা গবেষক নিজের পরিকল্পনা অনুযায়ী সরাসরি উৎস থেকে যে উপাত্ত সংগ্রহ করে তাকে প্রাথমিক উপাত্ত বলা হয়। প্রাথমিক উপাত্তের নির্ভরযোগ্যতা অনেক বেশি, কারণ অনুসন্ধানকারী নিজের গবেষণার প্রয়োজন অনুযায়ী এ উপাত্তসমূহ সংগ্রহ করে থাকেন। কিন্তু সময় ও অর্থের অভাবে অনেক সময় অনুসন্ধানকারীর পক্ষে প্রাথমিক উপাত্ত সংগ্রহ করা সম্ভব হয় না।

মাধ্যমিক উপাত্ত : অনুসন্ধানকারী অনেক সময় নিজের প্রয়োজনে অন্যের সংগৃহীত উপাত্ত ব্যবহার করে থাকেন। সুতরাং এরকম উপাত্তের উৎস পরোক্ষ। পরোক্ষ উৎস সরকার কর্তৃক সংগৃহীত পরিসংখ্যান, কোনো প্রতিষ্ঠান কর্তৃক সংগৃহীত উপাত্ত বা কোনো সাময়িকী থেকে প্রাপ্ত উপাত্ত হতে পারে। পরোক্ষ উৎস থেকে সংগৃহীত উপাত্তকে মাধ্যমিক উপাত্ত বলে। মাধ্যমিক উপাত্ত অন্য কোনো গবেষণামূলক কাজের জন্য সংগৃহীত। তাই এ উপাত্ত যখন অনুসন্ধানকারী নিজের প্রয়োজনে ব্যবহার করেন তখন এর নির্ভরযোগ্যতা অনেক কম।

পরিসংখ্যান উপাত্তের উপস্থাপন : সংগৃহীত উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলোর উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য, তথ্য ইত্যাদি জানার জন্য প্রয়োজন হয় উপাত্তের সারণিভুক্ত করা, আর সারণিভুক্ত করাকেই বলে উপাত্তের উপস্থাপন।

ধরা যাক, কোনো বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণীর শিক্ষার্থীর সংখ্যা 40 এবং কোনো পরীক্ষায় একটি বিষয়ে তাদের প্রাপ্ত নম্বর নিম্নরূপ :

60, 65, 70, 75, 55, 62, 72, 78, 80, 68, 90, 85, 80, 82, 60, 62, 85, 80, 80, 98, 90, 86, 88, 91, 76, 77, 80, 82, 80, 75, 77, 84, 63, 66, 77, 79, 50, 58, 88, 91।

এখানে নম্বরগুলো অবিন্যস্তভাবে আছে। এ ধরনের উপাত্তসমূহকে অবিন্যস্ত উপাত্ত বলে। অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে কোনো স্পষ্ট ধারণা পাওয়া যায় না। কিন্তু উপাত্তসমূহ যদি মানের অধঃক্রমে বা উর্ধ্বক্রমে সাজান যায় তবে কৃতিত্বের মান সম্বন্ধে ব্যাখ্যা দেওয়া সহজ হয়। সংগৃহীত নম্বরগুলো সাজিয়ে পাওয়া যায়,

50, 55, 55, 58, 60, 60, 62, 62, 63, 66, 68, 70, 72, 75, 75, 76, 77, 77, 77, 78, 79, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 82, 82, 84, 85, 85, 86, 88, 88, 90, 90, 91, 91, 98।

এভাবে সজ্জিত উপাত্তসমূহকে বিন্যস্ত উপাত্ত বলা হয়। উপাত্তসমূহ এভাবে বিন্যাস করা সময় সাপেক্ষ এবং বিরক্তিজনক। অধিকন্তু বিন্যাস করতে ভুল হওয়ার যথেষ্ট সম্ভাবনা থাকে।

সারণিবন্ধকরণ :

এখানে আলোচ্য নম্বরগুলো অধিকতর বোধগম্য করার জন্য এগুলোকে নিম্নোক্ত প্রকারে সারণিভুক্ত করা যায়।

প্রাপ্ত নম্বর	শিক্ষার্থী সংখ্যা	প্রাপ্ত নম্বর	শিক্ষার্থী সংখ্যা
50	1	77	3
55	2	78	1
58	1	79	1
60	2	80	6
62	2	82	2
63	1	84	1
66	1	85	2
68	1	86	1
70	1	88	2
72	1	90	2
75	2	91	2
76	1	98	1
			মোট = 40

এ সারণি থেকে কতজন শিক্ষার্থী কোনো একটি নির্দিষ্ট নম্বর পেয়েছে তা সহজে বলা যায়। যেমন, 50 পেয়েছে 1 জন, 80 পেয়েছে 6 জন, 98 পেয়েছে 1 জন শিক্ষার্থী ইত্যাদি। আলোচ্য উপাত্তের বৈশিষ্ট্য হল শিক্ষার্থীদের প্রাপ্ত নম্বর যা সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে। নম্বর হল উপাত্তের চলক এবং কোনো একটি নির্দিষ্ট নম্বর যত জন শিক্ষার্থী পেয়েছে তা হল চলকের গণসংখ্যা বা ঘটন সংখ্যা (Frequency)। উপরোল্লিখিত সারণি হল অবিন্যস্ত উপাত্তের 'গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি' (Frequency distribution)।

উপরোল্লিখিত গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি থেকে উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্যের ব্যাখ্যা খুবই কঠিন। সেজন্য উপরিউক্ত উপাত্তসমূহকে শ্রেণীতে বিন্যস্ত করা প্রয়োজন। পূর্ব পৃষ্ঠায় উল্লিখিত উপাত্তসমূহ শ্রেণীতে বিন্যস্ত করে উপস্থাপন করা হল :

প্রাপ্ত নম্বর	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70	71-75	76-80	81-85	86-90	91-95	96-100
শিক্ষার্থী সংখ্যা গণসংখ্যা)	1	2	3	3	3	3	12	5	5	2	1

শ্রেণীতে সাজিয়ে এভাবে উপস্থাপিত উপাত্তের সারণিকে বিন্যস্ত উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি বা সংক্ষেপে গণসংখ্যা সারণি বলে।

বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলক

যে চলকের মান শুধুমাত্র পূর্ণসংখ্যা হতে পারে, তাকে বিচ্ছিন্ন চলক (discontinuous variable) বলা হয়। যেমন, পরীক্ষার নম্বর, জনসংখ্যা ইত্যাদি। যে চলকের মান যে কোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে, তাকে অবিচ্ছিন্ন চলক (continuous variable) বলা হয়। যেমন, তাপমাত্রা, বয়স, উচ্চতা, ওজন। অবিচ্ছিন্ন চালকের বৈশিষ্ট্য হল, এরূপ চলকের দুইটি মানের মধ্যবর্তী যে কোনো সংখ্যাও ঐ চলকের মান হতে পারে। অবিচ্ছিন্ন চলকের মানগুলো কার্যক্ষেত্রে আসন্ন মান নেওয়া হয় (বা নিতে হয়) বলে শ্রেণী বিন্যাসের ক্ষেত্রে বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলকের বিশেষ কোনো পার্থক্য করার প্রয়োজন হয় না।

শ্রেণী ব্যাপ্তি এবং শ্রেণী সীমা : কোনো শ্রেণীর সীমা নির্দেশক প্রতীক, যেমন উপরে উল্লিখিত সারণির 46–50 কে একটি শ্রেণী ব্যাপ্তি বলে। প্রাপ্ত সংখ্যা 46 ও 50 কে শ্রেণী সীমা বলে। ছোট সংখ্যা 46 হল এ শ্রেণীর নিম্ন সীমা এবং বড় সংখ্যা 50 হল এ শ্রেণীর উচ্চ সীমা। সারণি থেকে দেখা যায় যে, যে সকল শিক্ষার্থী 46–50 শ্রেণী ব্যাপ্তির মধ্যে নম্বর পেয়েছে তাদের সংখ্যা 1 এবং যে সকল শিক্ষার্থী 51–55 শ্রেণী ব্যাপ্তির মধ্যে নম্বর পেয়েছে তাদের সংখ্যা 2, ইত্যাদি।

সারণিতে প্রদত্ত শ্রেণীগুলো একে অন্যকে অধিক্রমণ (overlap) করেনি। তবে আলোচিত উদাহরণে কোনো নম্বর ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হয়নি। কিন্তু যখন উচ্চতা, দৈর্ঘ্য, ওজন ইত্যাদি পরিমাপ করা হয়, তখন উপাত্তগুলো মিটার ও কিলোগ্রামের ভগ্নাংশ হতে পারে। এ জন্য শ্রেণী ব্যাপ্তি অবিচ্ছিন্ন (continuous) করার প্রয়োজন হয়। শ্রেণী ব্যাপ্তি অবিচ্ছিন্ন করার জন্য কোনো শ্রেণীর উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণীর নিম্নসীমার মধ্যবিন্দু নিয়ে সেই শ্রেণীর প্রকৃত উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণীর প্রকৃত নিম্নসীমা তৈরি করা হয়। যেমন, উপরোল্লিখিত সারণির প্রথম শ্রেণীর প্রকৃত উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে 50·5 ও 45·5 এবং দ্বিতীয় শ্রেণীর উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে 55·5 ও 50·5 ইত্যাদি।

শ্রেণী ব্যবধান : কোন শ্রেণীতে প্রকৃত উচ্চ সীমা ও নিম্ন সীমার পার্থক্য হল ঐ শ্রেণীর শ্রেণী ব্যবধান। উপরিউক্ত ক্ষেত্রে, শ্রেণী ব্যবধান হচ্ছে 50·5–45·5 অর্থাৎ, 5।

শ্রেণী মধ্যমান : কোনো শ্রেণী ব্যাপ্তির মধ্যবিন্দু হচ্ছে সেই শ্রেণীর শ্রেণী মধ্যমান। শ্রেণীর উচ্চসীমা ও নিম্ন সীমার যোগফলকে ২ দিয়ে ভাগ করে এটি পাওয়া যায়। সুতরাং,

$$\text{শ্রেণীর শ্রেণী মধ্যমান} = \frac{\text{উচ্চ সীমা} + \text{নিম্ন সীমা}}{2}$$

উপরিউক্ত নিবেশণের শ্রেণী মধ্যমান হল 48,53 ইত্যাদি।

শ্রেণী বিন্যাসের ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত ধাপগুলো অনুসরণ করা হয় :

ধাপ ১। সংগৃহীত উপাত্তসমূহের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ধারণ করে পরিসর [উপাত্তসমূহের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মানের অন্তরফল হল পরিসর (range)] বের করা হয়।

ধাপ ২। শ্রেণী সংখ্যা নির্ধারণ করা হয়। এর জন্য কোনো নির্দিষ্ট নিয়ম নেই। তবে শ্রেণী সংখ্যা ৫ থেকে ১৫ এর মধ্যে সীমাবন্ধ করা হয়।

ধাপ ৩। শ্রেণী ব্যাপ্তি নির্ধারণের জন্য উপাত্তসমূহের পরিসরকে শ্রেণী সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা হয়। প্রাপ্ত ভাগফলের কাছাকাছি কোনো সংখ্যাকে শ্রেণী ব্যবধান হিসেবে নির্ধারণ করা হয়।

ধাপ ৪। সংগৃহীত উপাত্তসমূহের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের শ্রেণীভুক্ত নিশ্চিত করা হয়।

ধাপ ৫। শ্রেণী গণসংখ্যা নির্ধারণের জন্য সংগৃহীত উপাত্তসমূহের এক একটি সংখ্যা যে শ্রেণীতে পড়ে সে শ্রেণীর সামনে একটি টালি চিহ্ন (/) দেওয়া হয় এবং গণনার সুবিধার্থে ৫টি টালি চিহ্নের একটি গুচ্ছ তৈরি করা হয়। কোনো শ্রেণীর টালি চিহ্নের সংখ্যা হল সে শ্রেণীর গণসংখ্যার সাংখ্যমান।

উদাহরণ ১। 30 টি আমের ওজন (গ্রামে) নিচে দেওয়া হল। শ্রেণী ব্যবধান 10 নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি তৈরি কর।

46, 55, 70, 65, 100, 95, 98, 112, 50, 56, 65, 85, 100, 90, 88, 87, 102, 113, 49, 67, 65, 85, 90, 102, 115, 93, 96, 85, 70, 75।

সমাধান : এখানে, সর্বনিম্ন সংখ্যামান 46 এবং সর্বোচ্চ সংখ্যামান 115। সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ সংখ্যামানের অন্তরফল $115 - 46 = 69$। যেহেতু $67 \div 10 = 6{\cdot}9$ সেহেতু শ্রেণী সংখ্যা 7 টি করা যায় যাদের ব্যবধান হবে 10।

প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি নিচে দেওয়া হল :

ওজন (গ্রামে)	টালি চিহ্ন	গণসংখ্যা
46 – 55	////	4
56 – 65	////	4
66 – 75	////	4
76 – 85	///	3
86 – 95	~~////~~ //	6
96 – 105	~~////~~ /	6
106 –115	///	3
	মোট	30

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা **(Cumulative frequency)**

মনে করি, কোনো একটি উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণির প্রথম শ্রেণীর গণসংখ্যা 3 এবং এর দ্বিতীয় শ্রেণীর গণসংখ্যা 5। সুতরাং দ্বিতীয় শ্রেণীর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হল $3 + 5 = 8$। এভাবে প্রত্যেক শ্রেণীর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নির্ণয় করা হয়। যে সারণিতে বিভিন্ন শ্রেণীর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা বণ্টনের রীতি দেখানো হয়, তাকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নিবেষণ সারণি বলে। উদাহরণ ১ এর 30 টি আমের ওজনের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি নিম্নরূপ :

ওজন (গ্রামে)	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
46 – 55	4	4
56 – 65	4	8(4 + 4)
66 – 75	3	12 (4 + 4 + 4)
76 – 85	6	15 (3 + 4 + 4 + 4)
86 – 95	7	21 (6 + 3 + 4 + 4 + 4)
96 – 105	6	27 (6 + 6 + 3 + 4 + 4 + 4)
106 – 115	3	30 (3 + 6 + 6+ 3 + 4 + 4 + 4)

এখানে লক্ষণীয় যে, শেষ শ্রেণীর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হচ্ছে মোট গণসংখ্যা বা উপাত্ত সংখ্যা।

উদাহরণ ২। কোনো বিচ্ছিন্ন নিবেশণ শ্রেণী মধ্যমান হল 47, 52, 57, 62, 67, 72, 77, 82, 87, 92, 97, 102। শ্রেণী ব্যবধান ও শ্রেণী সীমা নির্ণয় কর।

সমাধান : শ্রেণী ব্যবধান = 52 – 47 = 5। প্রথম শ্রেণীর মানগুলো হল 45, 46, 47, 48, 49।

∴ প্রথম শ্রেণীর শ্রেণী সীমা হল 45 – 49।

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় শ্রেণীর শ্রেণী সীমা হল 50 – 54।

সুতরাং শ্রেণী সীমাগুলো হবে 45 – 49, 50 – 54, 55 – 59, 60 – 64, 65 – 69, 70 – 74, 75 – 79, 80 – 84, 85 – 89, 90 – 94, 95 – 99, 100 – 104।

৯.৩। পরিসাংখ্যিক উপাত্তের চিত্রলেখ

পরিসাংখ্যিক উপাত্তসমূহ সারণিবন্ধ করার আলোচনা আগের অনুচ্ছেদে করা হয়েছে। কিন্তু পরিসাংখ্যিক উপাত্তসমূহ যদি চিত্রলেখের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়, তবে তা বোঝা ও সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য যেমন সহজ হয় তেমনি চিত্তাকর্ষক হয়। এ জন্য পরিসংখ্যানে চিত্রলেখের মাধ্যমে গণসংখ্যা নিবেশণের উপস্থাপন বহুল প্রচলিত পদ্ধতি।

চিত্রলেখের মাধ্যমে গণসংখ্যা নিবেশণের উপস্থাপন নিয়ে আলোচনা করা হল :

আয়তলেখ বা গণসংখ্যা আয়তলেখ **(Histogram or frequency histogram)**

গণসংখ্যা নিবেশণের একটি চিত্রলেখ হচ্ছে আয়তলেখ বা গণসংখ্যা আয়তলেখ। আয়তলেখ অঙ্কনের জন্য নিম্নোক্ত পদক্ষেপ অনুসরণ করা হয় :

১। সুবিধাজনক স্কেলে x অক্ষ বরাবর শ্রেণী ব্যবধান লেখা হয় (শ্রেণী ব্যবধানগুলো অবিচ্ছিন্ন হতে হবে) এবং শ্রেণী ব্যবধানকে ভূমি ধরে আয়ত আঁকা হয়।

২। সুবিধাজনক স্কেলে y অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা নেওয়া হয় এবং গণসংখ্যা হয় আয়তের উচ্চতা। দুই অক্ষ বরাবর ধর্তব্য স্কেল যে সমান হতে হবে এমন কোন বাঁধা ধরা নিয়ম নেই। প্রতি অক্ষের জন্য সুবিধাজনক স্কেল নিতে হয়।

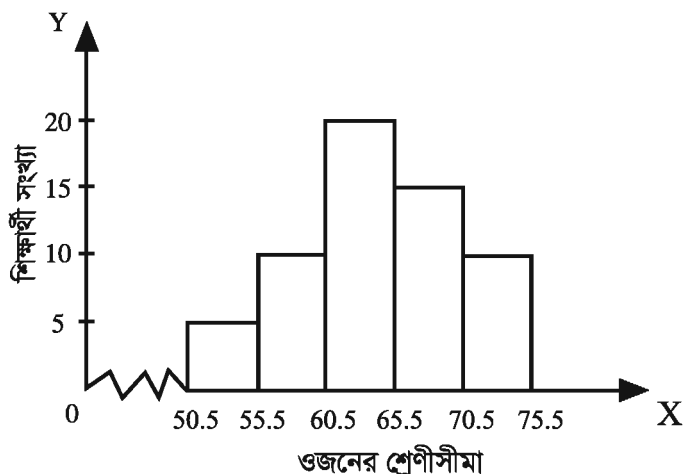
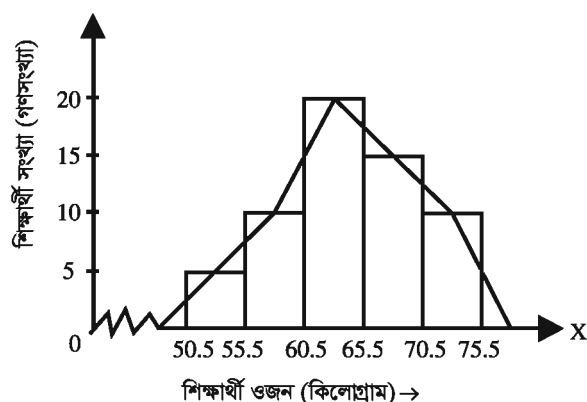
উদাহরণ ১। কোন স্কুলের 10ম শ্রেণীর 60 জন শিক্ষার্থীর ওজনের (আসন্ন কিলোগ্রাম) গণসংখ্যা নিবেশণ হল :

ওজন (কিলোগ্রাম) :	51 - 55	56 - 60	61 - 65	66 - 70	71 - 75
শিক্ষার্থীর সংখ্যা :	5	10	20	15	10

গনসংখ্যা নিবেশণের আয়তলেখ আঁক।

সামাধান : এখানে শ্রেণী ব্যাপ্তিগুলো অবিচ্ছিন্ন নয় বিধায় এদেরকে অবিচ্ছিন্ন করে নিতে হবে। (সারণিতে উপস্থাপিত)

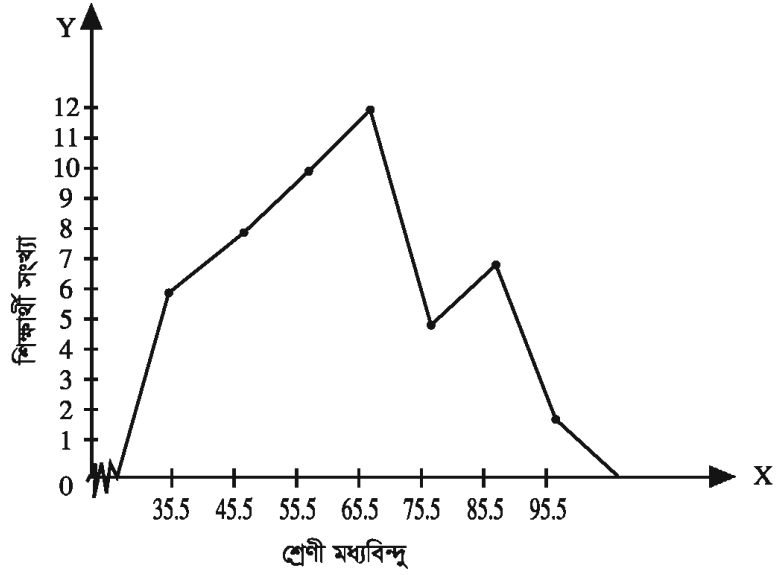
ওজন (কিলোগ্রাম)	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণীসীমা	শিক্ষার্থীর সংখ্যা
51 - 55	50.5 - 55.5	5
56 - 60	55.5 - 60.5	10
61 - 65	60.5 - 65.5	20
66 - 70	65.5 - 70.5	15
71 - 75	70.5 - 75.5	10

x অক্ষ ও y বরাবর ছক কাগজের (Graph paper) প্রতি ঘরকে এক একক ধরে গণসংখ্যা নিবেশণের আয়তলেখ আঁকা হয়েছে। যেহেতু স্কেল x অক্ষ বরাবর 50.5 থেকে আরম্ভ সেহেতু x অক্ষের মূল বিন্দুর সন্নিকটে একটি ভাঙা চিহ্ন দিয়ে বোঝানো হয়েছে যে, মূল বিন্দু থেকে 50.5 এর পূর্ব পর্যন্ত ঘরগুলো আছে।

গণসংখ্যা বহুভুজ : আয়তলেখের আয়তসমূহের ভূমির সমান্তরাল বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুসমূহ রেখাংশ দ্বারা যোগ করে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়। আয়তলেখ সম্পূর্ণ করার জন্য আয়তের মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় x অক্ষ বরাবর শূন্য গণসংখ্যার ব্যাপ্তির মধ্য বিন্দুর সঙ্গে যুক্ত করা হয়। উদাহরণ ১ এর আয়তলেখের গণসংখ্যা বহুভুজ পার্শ্বে দেখানো হল :

উদাহরণ ২। নবম শ্রেণীর 50 জন শিক্ষার্থীর গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি দেওয়া হল। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

প্রাপ্ত নম্বর	31- 40	41- 50	51- 60	61-70	71- 80	81- 90	91-100	মোট
শিক্ষার্থী সংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2	50

সমাধান : শ্রেণীর মধ্যবিন্দু সমূহ থেকে বের করতে হবে। (সারণিতে উপস্থাপিত)

প্রাপ্ত নম্বর	শ্রেণী মধ্যবিন্দু	শিক্ষার্থীর সংখ্যা
31 - 40	$\frac{31+40}{2} = 35.5$	6
41 - 50	45.5	8
51 - 60	55.5	10
61 - 70	65.5	12
71 - 80	75.5	5
81 - 90	85.5	7
91 - 100	95.5	2
		মোট $N = 50$

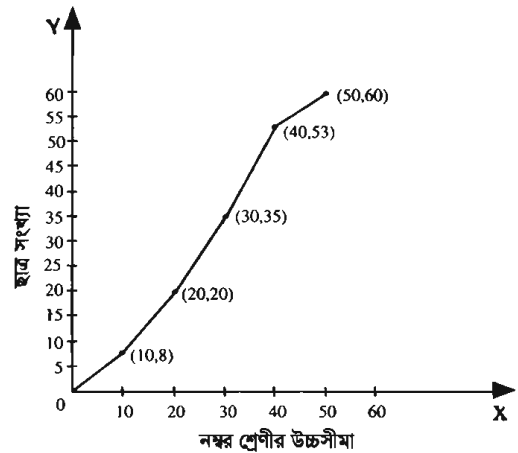
x অক্ষ বরাবর লেখ কাগজের 5 ঘরকে শ্রেণী ব্যবধান (10 একক) এবং y অক্ষ বরাবর দুই ঘরকে একজন শিক্ষার্থী ধরে নিয়ে গণসংখ্যা বহুভূজ আঁকা হল।

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা লেখাঙ্কন বা অজিভ রেখা **(Cumulative Frequency Curve or an Ogive)**: কোনো উপাত্তের শ্রেণীকরণের পর শ্রেণী ব্যাপ্তির উচ্চসীমা x অক্ষ বরাবর এবং শ্রেণীর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা y অক্ষ বরাবর স্থাপন করে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার লেখাঙ্কন বা অজিভ রেখা পাওয়া যায়।

উদাহরণ ৩। কোনো শ্রেণীর 60 জন ছাত্রের 50 নম্বরের সাময়িকী পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশণের সারণি হল:

প্রাপ্ত নম্বর	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50	মোট
ছাত্র সংখ্যা (গণসংখ্যা)	8	12	15	18	7	60

উল্লেখিত গণসংখ্যা নিবেশণের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হল:

প্রাপ্ত নম্বর	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
1–10	8	8
11–20	12	20 (12 + 8)
21–30	15	35 (15 + 12 + 8)
31–40	18	53 (18 + 15 +12 +8)
41–50	7	60 (7 + 18 + 15 + 12 + 8)

x অক্ষ বরাবর ছক কাগজের দুই ঘরকে শ্রেণী ব্যাপ্তির উচ্চসীমার একক এবং y অক্ষ বরাবর ছক কাগজের এক ঘরকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার 5 একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের ক্রমযোজিত গণসংখ্যার অজিভ রেখা আঁকা হয়েছে।

অনুশীলনী ৯.১

১। বিভিন্ন অর্থে পরিসংখ্যান বলতে কী বোঝ?

২। পরিসংখ্যানের মৌলিক বৈশিষ্ট্যসমূহ আলোচনা কর।

৩। প্রাথমিক ও মাধ্যমিক উপাত্ত বলতে কী বোঝ? এ দুই শ্রেণীর উপাত্তের মধ্যে কোন শ্রেণীর উপাত্ত অধিক বিশ্বাসযোগ্য এবং কেন?

৪। নিম্নোলিখিত পদগুলো (terms) বলতে কী বোঝ?
চলক; শ্রেণী ব্যাপ্তি; শ্রেণী পরিসর; শ্রেণী সাধারণ মান; শ্রেণীর গণসংখ্যা; শ্রেণী ব্যবধান 5 ধরে শ্রেণী সীমা; প্রকৃত শ্রেণী সীমা; ক্রমযোজিত গণসংখ্যা।

৫। কোনো স্কুলের ১০ম শ্রেণীর 30 জন ছাত্রীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বর নিচে দেওয়া হল। গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।
82, 50, 55, 60, 80, 82, 75, 80, 60, 55, 56, 65, 75, 82, 90, 95, 100, 99, 80, 94, 50, 57, 68, 77, 90, 83, 93, 57, 60, 96.

৬। কোনো শ্রেণীর ৩০ জন ছাত্রের প্রদত্ত চাঁদা (টাকায়) নিচে দেওয়া হল। শ্রেণী ব্যবধান 10 ধরে গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।
32, 30, 54, 45, 78, 74, 108, 112, 66, 76, 40, 88, 20, 14, 15, 35, 44, 66, 75, 95, 84, 96, 102, 110, 88, 74, 112, 34, 14, 44.

৭। একটি ঝুড়ি থেকে এলোমেলোভাবে ৪০টি আম সাহানাকে দেওয়া হল। আমগুলোর ওজন (গ্রামে) নিচে দেওয়া হল। গণসংখ্যা ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা তৈরি কর।
55, 45, 30, 110, 75, 40, 60, 100, 65, 40, 100, 75, 70, 60, 70, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 55, 65, 45, 85, 30, 90, 85, 75, 75, 70, 110, 100, 80, 70, 30, 55, 70.

৮। কোনো এক সালে একটি এলাকার অনূর্ধ্ব 50 বছর বয়সের লোকের বয়সের (বছর) গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি হল:

বয়স (বছরে)	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50
গণসংখ্যা	11	32	51	49	27	6	4

(ক) দ্বিতীয় শ্রেণী ব্যাপ্তির নিম্ন সীমা লেখ।
(খ) চতুর্থ শ্রেণীর শ্রেণী মধ্যমান নির্ণয় কর।
(গ) শ্রেণী ব্যবধান নির্ণয় কর।
(ঘ) ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

৯। শ্রেণীর শ্রেণী সাধারণ মান হল 104, 114, 124, 134, 144, 154 ও 164।
শ্রেণী ব্যবধান এবং শ্রেণী সীমা নির্ণয় কর।

১০। নিম্নোক্ত উপাত্তের জন্য আয়তলেখ আঁক :

প্রাপ্ত নম্বর	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50
ছাত্র সংখ্যা	5	10	25	35	15

১১। ১০০ জন লোকের উচ্চতার (সে.মি.) নিবেশণ সারণি নিচে দেওয়া হল। এ গণসংখ্যা নিবেশণের আয়তলেখ ও গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

উচ্চতা (সে.মি)	146–155	156–165	166–175	176–185	186–195
গণসংখ্যা	5	35	25	15	20

১২। প্রশ্ন ১১ এর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং এ উপাত্তের ক্রমযোজিত গণসংখ্যার লেখাঙ্কন বা অজিভ রেখা আঁক।

১৩। একটি সমস্যা সমাধানে ২৫ জন ছাত্রীর প্রত্যেকের যে সময় (সেকেন্ড) লেগেছিল তা হল-

16, 26, 20, 30, 27, 28, 33, 37, 38, 40, 46, 42, 43, 46, 46, 48, 49, 50, 59, 58, 53, 20, 60, 64, 52.

(ক) শ্রেণী ব্যবধান 10 ধরে গণসংখ্যা, ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

(খ) গণসংখ্যা নিবেশণের একটি আয়তলেখ ও গণসংখ্যার বহুভুজ আঁক।

(গ) ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নিবেশণের একটি অজিভ রেখা আঁক।

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ (Measures of Central Tendency)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে অনুসন্ধানাধীন সংগৃহীত উপাত্তসমূহের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণির মাধ্যমে উপস্থাপন করার পদ্ধতি বর্ণনা করা হয়েছে এবং সহজে বোধগম্য করার জন্য আয়তলেখ, গণসংখ্যা বহুভুজ, অজিভ রেখা ইত্যাদি আলোচনা করা হয়েছে। এগুলো পরিসংখ্যানের অনেক প্রয়োজনীয় উদ্দেশ্য সাধন করে। তবুও ক্ষেত্র বিশেষে অনুসন্ধানাধীন উপাত্তসমূহের আরও সংক্ষিপ্ত করার প্রয়োজন দেখা দেয় এবং সাধারণভাবে উপাত্তসমূহের বৈশিষ্ট্য গাণিতিকভাবে পরিমাপ করার দরকার হয়। যেমন, কোনো শ্রেণীর শিক্ষার্থীদের গণিতের প্রাপ্ত নম্বর মানের ক্রমানুসারে সাজালে দেখা যায় যে, নম্বরগুলো কোনো একটি বিশেষ নম্বরের কাছাকাছি পুঞ্জিভুত হয়। যে নম্বরকে কেন্দ্র করে নম্বরগুলো কেন্দ্রীভূত হয়, সেই নম্বর সমস্ত নম্বরের প্রতিনিধিত্ব করে।

কেন্দ্রীয় প্রবণতা

অনুসন্ধানাধীন উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জিভূত হয়। আবার উপাত্তসমূহের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণিবদ্ধ করলে নিবেশণের মাঝামাঝি একটি শ্রেণীর গণসংখ্যা খুবই বেশি হয়। বস্তুত উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় মানের দিকে পুঞ্জিভূত হওয়ার ঝোঁক বা প্রবণতাকেই কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে। কেন্দ্রীয় মান উপাত্তসমূহের প্রতিনিধিত্বকারী একটি সংখ্যা এবং এর দ্বারা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করা হয়। সাধারণভাবে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হল :

(১) গাণিতিক গড় বা গড়, (২) মধ্যমা, (৩) প্রচুরক।

গাণিতিক গড় (Arithmetic Mean)

সংগৃহীত উপাত্তসমূহের চলকের মানের সমষ্টিকে যদি চলকের সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে গাণিতিক গড় পাওয়া যায়। মনে করি, অবিন্যস্ত, চলক x এর সংখ্যা n এবং x_1, x_2 ...., x_n চলকের মান। যদি চলকের গড় মান $\bar{x}$ দ্বারা সূচিত হয়, তবে

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

এখানে $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n$ অর্থাৎ, $\sum_{i=1}^{n} x_i$ দ্বারা চলকের মানসমূহের সমষ্টি বোঝায়। x এর কিছু সংখ্যক মান $\overline{x}$ এর কম এবং কিছু সংখ্যক মান $\overline{x}$ এর বেশি। তাই এটি সকল মানের মধ্যমান এবং এর থেকে বলা যায় যে, $\overline{x}$ কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ।

উদাহরণ ১। 50 নম্বরের মধ্যে অনুষ্ঠিত পরীক্ষায় কোনো শ্রেণীর 20 জন শিক্ষার্থীর গণিতের প্রাপ্ত নম্বর হল : 40, 41, 45, 18, 41, 20, 45, 41, 45, 25, 20, 40, 18, 20, 45, 47, 48, 48, 49, 19. প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে $n = 20$ এবং নম্বরের বিভিন্ন মান হল $x_1 = 40, x_2 = 41, x_3 = 45$ ইত্যাদি। যদি গাণিতিক গড় নম্বর $\overline{x}$ হয়, তবে $\overline{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{715}{20} = 35.75$ (এখানে প্রাপ্ত নম্বরগুলোর সমষ্টি = 715)।

$\therefore$ প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় = 35.75।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে অবিন্যস্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয়

n এর মান বেশ বড় হলে সংখ্যাগুলো সব যোগ করে গড় নির্ণয় করা বেশ অসুবিধাজনক এবং এতে ভুলের সম্ভাবনাও যথেষ্ট। এরকম ক্ষেত্রে গড় নির্ণয়ের সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি হচ্ছে সংখ্যাগুলো ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করে তাদের গড় কত হতে পারে তা অনুমান করা। উপরের উদাহরণে বোঝা যায় যে, গড় সম্ভবত 30 এর বেশি কিন্তু 40 এর কম হবে। আমরা অনুমিত গড় 30 ধরে নিচ্ছি। এখন প্রত্যেকটি সংখ্যা x থেকে এই অনুমিত গড় a বিয়োগ করি। সংখ্যাটি 30 এর বড় হলে বিয়োগফল $x_i - a$ ধনাত্মক, 30 এর ছোট হলে বিয়োগফল $x_i - a$ ঋণাত্মক হবে। মূল সংখ্যাগুলো এবং এই বিয়োগফলগুলো সারণির আকারে পাশাপাশি লিখি।

উপাত্ত (xi)	(উপাত্ত- অনুমিত গড়) = (xi−a)	ক্রমযোজিত সমষ্টি
40	10	10
41	11	21
45	15	36
18	−12	24
41	11	35
20	−10	25
45	15	40
41	11	51
45	15	66
25	−5	61
20	−10	51

40	10	61
18	−12	49
20	−10	39
45	15	54
47	17	71
48	18	89
48	18	107
49	19	126
19	−11	115

$$\sum (xi-a) = 115$$

এরপর সকল বিয়োগফলের বীজগাণিতিক সমষ্টি (অর্থাৎ, চিহ্নযুক্ত সংখ্যা হিসেবে এদের যোগফল) নির্ণয় করি। পরপর দুইটি করে বিয়োগফল যোগ করলে এই সমষ্টি নির্ণয় অতি সহজ হয় এবং এ কাজ সারণিতে নিষ্পন্ন করা যায়। যেমন, এই উদাহরণে,

$10 + 11 = 21, 21 + 15 = 36, 36 + (-12) = 24$ ইত্যাদি।

এই উদাহরণে, $\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)$, অর্থাৎ বিয়োগফলগুলোর সমষ্টি = 115.

$\therefore$ বিয়োগফলগুলোর গড় = $\frac{115}{20} = 5{\cdot}75$

$\therefore$ প্রকৃত গড় = অনুমিত গড় + বিয়োগফলগুলোর গড়

$= 30 + 5{\cdot}75$

$= 35{\cdot}75$

মন্তব্য ১। $u_i = x_i - a$ লিখলে আমরা প্রমাণ করব যে,

$\bar{x} = a + \bar{u}$, যেখানে $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ এবং $\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$

প্রমাণ : $u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$

$= (x_1 - a) + (x_2 - a) + \ldots\ldots\ldots. + (x_n - a) = (x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots. + x_n) - na$

সুতরাং

$$\frac{u_i + u_2 + u_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots. + x_n}{n} - a$$

অর্থাৎ, $\bar{u} = \bar{x} - a$, বা $\bar{x} = a + \bar{u}$,

মন্তব্য ২। প্রকৃত গড় $\bar{x}$ অনুমিত গড় a এর উপর নির্ভর করে না। শিক্ষার্থীকে উপরের উদাহরণে $a = 40$ বা $a = 35$ ধরে নিয়ে নতুনভাবে নির্ণয় করে এর সত্যতা যাচাই করার পরামর্শ দেওয়া হল।

অনুমিত গড় প্রকৃত গড়ের যত কাছাকাছি হবে, সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের কাজ ততই সহজ হবে।

বিন্যস্ত উপাত্তের গাণিতিক গড়

উদাহরণ ১ এ 20 জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর যে স্বতন্ত্র তা নয়। একাধিক শিক্ষার্থী একই নম্বর পেয়েছে। প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা সারণি হল :

প্রাপ্ত নম্বর x_i	শিক্ষার্থীর সংখ্যা (গণসংখ্যা) f_i	$f_i x_i$
18	2	36
19	1	19
20	3	60
25	1	25
40	2	80
41	3	123
45	4	180
47	1	47
48	2	96
49	1	49
k=10	$\sum_{i=1}^{10} f_i = n = 20$	$\sum f_i x_i = 715$

প্রাপ্ত নম্বরের গড় $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \dfrac{715}{20} = 35{\cdot}75.$

সংজ্ঞা ১। (বিন্যস্ত উপাত্তের গাণিতিক গড়) যদি n সংখ্যক উপাত্তের k সংখ্যক মান $x_1, x_2 \ldots\ldots, x_k$ এর গণসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2 \ldots\ldots, f_k$ হয়, তবে উপাত্তের গাণিতিক গড়

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{10} f_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i \text{, যেখানে } n = \sum_{i=1}^{k} f_i \text{ গণসংখ্যার সমষ্টি}$$

এই সূত্রের সাহায্যে গণসংখ্যা নিবেষণের গাণিতিক গড় নির্ণয়ের পদ্ধতি নিচের উদাহরণে দেখানো হল।

উদাহরণ ২। নিচে কোনো একটি শ্রেণীর শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের সংখ্যা নিবেশণ দেওয়া হল :

প্রাপ্ত নম্বর	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84	85-94
শিক্ষার্থী সংখ্যা	5	10	15	20	30	16	4

উপরোল্লিখিত তথ্যমালার গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে প্রত্যেক ছাত্রের ব্যক্তিগত নম্বর কত তা নির্ণয় করা যায় না। তাই প্রত্যেক শ্রেণীর শ্রেণীমধ্যমান (Class midvalue) নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়। মনে করি, শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের চলক x_i গাণিতিক গড় নির্ণয়ের সারণি নিম্নরূপ :

শ্রেণীর ব্যাপ্তি	শ্রেণী মধ্যমান (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)	$f_i x_i$
25-34	29·5	5	147·5
35-44	39·5	10	395·0
45-54	49·5	15	742·5
55-64	59·5	20	1190·0
65-74	69·5	30	2085·0
75-84	79·5	16	1272·0
85-94	89·5	4	358·0
মোট		100	6190·0

$$\therefore \text{ নির্ণেয় গাণিতিক গড় } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{6190}{100} = 61 \cdot 9.$$

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে শ্রেণীবিন্যাসকৃত উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয় :

অবিন্যস্ত উপাত্তের গড় নির্ণয়ের সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির অনুরূপ একটি সহজ পদ্ধতি শ্রেণীবিন্যাসকৃত উপাত্তের গড় নির্ণয়ের জন্যও রয়েছে।

এ পদ্ধতিতে নির্ণেয় গড় $\bar{x} = a + h\bar{u}$, যেখানে $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i$ এবং $\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i u_i$

k = মোট শ্রেণীর সংখ্যা এবং $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$ = উপাত্তের মোট সংখ্যা।

সূত্রের প্রমাণ :

$$u_i = \frac{x_i - a}{h} \Rightarrow x_i = a + hu_i, \Rightarrow f_i x_i = f_i a + hf_i u_i.$$

এখানে $i = 1, 2 \ldots\ldots, k$ বসিয়ে প্রাপ্ত মানগুলো যোগ করে পাই,

$$\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \left(\sum_{i=1}^{k} f_i\right) a + h\left(\sum_{i=1}^{k} f_i u_i\right)$$

অর্থাৎ, $n\bar{x} = na + hn\,\bar{u}$, কেননা

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = n,\ \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i \text{ এবং } \bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i u_i \ \therefore\ \bar{x} = a + h\bar{u}.$$

উদাহরণ ৩। সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে উদাহরণ ২ এর উপাত্তগুলোর গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

সম্পূর্ণ কাজ সারণির আকারে নিচে দেখানো হল।

শ্রেণীর ব্যাপ্তি	শ্রেণী মধ্যমান	গণসংখ্যা f_i	u_i	$f_i u_i$
25-34	29·5	5	-3	-15
35-44	9·5	10	-2	-20
45-54	49·5	15	-1	-15
55-64	59·5	20	0	0
65-74	69·5	30	1	30
75-84	79·5	16	2	32
85-94	89·5	4	3	12
k = 7		n = 100		$\sum_{i=1}^{k} f_i u_i = 24$

এখানে মধ্যবর্তী শ্রেণী হচ্ছে 55- 64, যার শ্রেণী মধ্যমান 59.5 সুতরাং a = 59.5 ধরে $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ (এখন h = 10) নির্ণয় করি; এই মানগুলো হচ্ছে যথক্রমে -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. প্রতি শ্রেণীর জন্য $f_i u_i$ নির্ণয় করি। এদের সমষ্টি

$$\sum_{i=1}^{k} f_i u_i = 24 \text{ (এখানে } k = 7) \ \therefore\ \bar{u} = \frac{24}{100} = 0.24 \text{ (এখানে } n = 100)$$

ফলে $\bar{x} = 59.5 + 0.24 \text{ x } 10 = 59.5 + 24 = 61.9$

উদাহরণ ৪। কোনো কারখানার অনুর্ধ্ব ৫০ বছর শ্রমিকদের বয়সের গণসংখ্যা নিবেশণ নিম্নরূপ। তাদের বয়সের গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

শ্রেণী ব্যাপ্তি	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
গণ সংখ্যা	3	13	21	15	5	4	2

সমাধান : শ্রেণী ব্যাপ্তির শ্রেণী মান যথাক্রমে 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47.

মনে করি, $a = 32$ এখানে $h = 5$.

গাণিতিক গড় নির্ণয়ের সারণি :

শ্রেণীর ব্যাপ্তি	শ্রেণী মধ্যমান	শ্রেণী গণসংখ্যা f_i	$u_i = \frac{x_i - 32}{5}$	$f_i u_i$
15 - 19	17	3	-3	-9
20 - 24	22	13	-2	-26
25 - 29	27	21	-1	-21
30 - 34	32	15	0	0
35 - 39	37	5	+1	+5
40 - 44	42	4	+2	+8
45 - 49	47	2	+3	+6
k = 7		n = 63		-37

$$\therefore \bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i u_i = \frac{1}{63}(-37) = -0.587$$

$\therefore \bar{x} = a + h\bar{u} = 32 + 5(-0.587) = 29.06$ $\therefore$ বয়সের গাণিতিক গড় = 29.06 বছর।

গুরুত্ব প্রদত্ত (Weighted) উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয়

অনেক ক্ষেত্রে চলক x এর মান $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$. একেকটি কারণ দ্বারা প্রভাবিত হতে পারে। এক্ষেত্রে চলকের মান $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$. এর সাথে এদের গুরুত্ব/ভার (কারণ) $w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots, w_n$ বিবেচনায় এনে গুরুত্ব প্রদত্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয় করতে হয়।

সংজ্ঞা। যদি চলক x এর n সংখ্যক মান হয় $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$. এবং এদের গুরুত্ব যদি হয় w_1, $\ldots\ldots\ldots, w_n$ তবে এদের গুরুত্ব প্রদত্ত গাণিতিক গড় হবে

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

উদাহরণ ৫। কোনো কলেজের বিভিন্ন বিভাগের স্নাতক সম্মান শ্রেণীতে পাশের হার ও ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা দেওয়া হল। উক্ত কলেজের ঐ কয়টি বিভাগের স্নাতক সম্মান শ্রেণীতে পাশের হার নির্ণয় কর।

বিভাগের নাম	পাশের হার (শতকরায়)	ছাত্রছাত্রী সংখ্যা
গণিত	70	80
পরিসংখ্যান	80	120
ইংরেজি	50	100
বাংলা	90	225
প্রাণিবিদ্যা	60	135
রাষ্ট্রবিজ্ঞান	85	300

সমাধান : মনে করি, পাশের হারের চলক x. পাশের হারের পাশাপাশি ছাত্রছাত্রী সংখ্যা দেওয়া আছে। সুতরাং পাশের হারের ভার হল ছাত্রছাত্রী সংখ্যা। মনে করি, ছাত্রছাত্রী সংখ্যার চলক w.

গুরুত্ব প্রদত্ত গড় নির্ণয়ের সারণি :

বিভাগের নাম	x_i	w_i	$w_i x_i$
গণিত	70	80	5600
পরিসংখ্যান	80	120	9600
ইংরেজি	50	100	5000
বাংলা	90	225	20250
প্রাণিবিদ্যা	60	135	8100
রাষ্ট্রবিজ্ঞান	85	300	25500
মোট		960	74050

$$\bar{x}_w = \frac{\sum\limits_{i=1}^{6} x_i w_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} = \frac{74050}{960} = 77{\cdot}14 \quad \therefore \text{ উত্তর ঃ পাশের গড় হার } 77.14\%$$

মধ্যক (Median)

গাণিতিক গড় দেখে অনুসন্ধানাধীন উপাত্তসমূহের প্রকৃতি বা বৈশিষ্ট্য সম্বন্ধে কোনো সিদ্ধান্ত নেওয়া অনেক সময় সম্ভব হয় না। যেমন কোনো 5 জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বর হল- 30, 30, 30, 90, 100. প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় হল 56. শেষের নম্বরের জন্য গাণিতিক গড় 56 হয়েছে। কিন্তু এর থেকে ছাত্রদের গণিতের কৃতিত্ব সম্বন্ধে যদি বলা হয় মোটামুটি ভাল, তবে এ সিদ্ধান্ত বাস্তবের সাথে সামঞ্জস্যপর্ণ হবে না। কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের জন্য এ গড় যথাযথ নয়। এজন্য অন্য কোনো গড়ের প্রয়োজন হয়। এখানে যদি আমরা কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ 30 নিই তবে তা বেশি সংখ্যক ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ হবে। কেন্দ্রীয় প্রবণতার এ পরিমাপ হল মধ্যক।

সংজ্ঞা। মধ্যক : যদি উপাত্তের মানগুলো মানের ঊর্ধ্বক্রমে বা নিম্নক্রমে সাজানো হয় তবে সজ্জিত মানসমূহের মধ্যম মানকে মধ্যক বলা হয়।

অবিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় : প্রথমে অবিন্যস্ত উপাত্তের মানসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজান হয়। তারপর সজ্জিত মানসমূহের মধ্যম মানকে হিসেবে নেওয়া হয়। যদি উপাত্তের চলকের n সংখ্যক মান থাকে (n বিজোড় হয়), তবে মধ্যক হবে $\frac{n+1}{2}$ তম পদ। এ ক্ষেত্রে কেবল একটি মধ্যক হবে। আর যদি n জোড় সংখ্যা হয়, তবে দুইটি মধ্যম মান থাকবে অর্থাৎ, মধ্যম মানের পদ দুইটি হবে $\frac{n}{2}$ তম ও $(\frac{n}{2}+1)$ তম পদ। এদের যে কোনো একটিকে মধ্যক হিসেবে নেওয়া যায়। তবে প্রচলিত পদ্ধতিতে মধ্যম মানের গাণিতিক গড়কে মধ্যক হিসেবে নেওয়া হয়।

উদাহরণ ৬। নিম্নে প্রদত্ত মানসমূহের মধ্যক নির্ণয় কর।

4, 1, 6, 3, 8, 7, 2, 9, 12, 2, 3, 8, 15.

সমাধান : মানের ঊর্ধ্ব ক্রমানুসারে সাজালে পাওয়া যায় 1, 2, 2, 3, 3, 4, 6, 7, 8, 8, 9, 12, 15.

এখানে মানের সংখ্যা 13. সুতরাং 7 তম পদ হল মধ্যম পদ যার মান 6.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যক 6.

উদাহরণ ৭। চলকের মান 6, 1, 7, 2, 3, 7, 8, 7, 10, 16. হলে, মধ্যক নির্ণয় কর।

সমাধান : মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজালে পাওয়া যায় 1, 2, 3, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 16.

এখানে পদের সংখ্যা 10. সুতরাং $\frac{10}{2}$তম এবং $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ তম অর্থাৎ, পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদ দুইটি মধ্যম পদ যাদের মান যথাক্রমে 7 ও 7. এ দুইটির গাণিতিক গড় হল 7. সুতরাং মধ্যক হল 7.

শ্রেণী বিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় :

উপাত্তসমূহ যদি শ্রেণী নিবেশণ সারণিতে সাজানো থাকে তবে মধ্যক নির্ণয়ের সূত্র হচ্ছে :

$$\text{মধ্যক} = \frac{L + \frac{n}{2} - cuf}{f_m} \times h$$

n = মোট গণসংখ্যা
L = মধ্যক শ্রেণীর নিম্নসীমা
fm = মধ্যক শ্রেণীর গণসংখ্যা
h = মধ্যক শ্রেণীর শ্রেণী ব্যবধান
cuf = মধ্যক শ্রেণীর পূর্ববর্তী শ্রেণীসমূহের গণসংখ্যা সমষ্টি

উদাহরণ ৮। উদাহরণ 4 এর শ্রেণী নিবেশণ এর মধ্যক নির্ণয় :

নম্বর	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণীসীমা	গণসংখ্যা, f_i	যোজিত গণসংখ্যা
15 – 19	14.5 – 19.5	3	3
20 – 24	19.5 – 24.5	13	16
25 – 29	24.5 – 29.5	21	37
30 – 34	29.5 – 34.5	15	52
35 – 39	34.5 – 39.5	5	57
40 – 44	39.5 – 44.5	4	61
45 – 49	44.5 – 49.5	2	63

$$\text{মধ্যক} = L + \frac{\frac{n}{2} - cuf}{f_m} \times h$$

$$= 24{\cdot}5 + \frac{31.5 - 26}{21} \times 5$$

$$= \frac{5.5 \times 5}{21}$$

$$= 25{\cdot}81$$

প্রচুরক (Mode)

উপাত্তের মানসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজানো হলে দেখা যায় মাঝামাঝি একটি মানের চতুর্দিকে উপাত্তের মানের ঘনত্ব বেশি। প্রকৃতপক্ষে কোনো মানবিশিষ্ট একটি চলকের পুনরাবৃত্তির জন্যই এরূপ পরিস্থিতির উদ্ভব ঘটে। তাই এই মানটি উপাত্তের বৈশিষ্ট্য পরিমাপক হিসেবে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে এবং একে প্রচুরক বলে। সাধারণত কোনো চলকের যে মানটি সবচেয়ে বেশি বার উপস্থাপিত হয়, তাকেই প্রচুরক বলে। কোনো উপাত্তে প্রচুরক নাও থাকতে পারে। আবার থাকলেও প্রচুরক অনন্য নাও হতে পারে।

উদাহরণ ৮। কোনো উপাত্তের চলকসমূহের মান হল 2, 2, 3, 6, 7, 7, 7, 8, 9. এদের প্রচুরক নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে 7 সর্বাধিক তিন বার উপস্থাপিত হয়েছে। সুতরাং প্রচুরক হল 7.

উদাহরণ ৯। উপাত্তের চলকসমূহের মান হল 2, 4, 6, 9, 8, 15. প্রচুরক নির্ণয় কর।

সমাধান : উপাত্তের চলকসমূহের কোনো মানই পুনরাবৃত্তি হয়নি। সুতরাং প্রদত্ত উপাত্তে প্রচুরক অনুপস্থিত।

উদাহরণ ১০ : উপাত্তের চলকসমূহের মান হল 25, 25, 26, 27, 27, 27, 28, 29, 30, 30, 30. প্রচুরক নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে 27 ও 30 সর্বাধিক তিনবার উপস্থাপিত হয়েছে সুতরাং প্রচুরক 27 ও 30.

শ্রেণী নিবেশণ থেকে প্রচুরক নির্ণয় পদ্ধতি :

উপাত্তসমূহ যদি শ্রেণী নিবেশণ সারণিতে সাজানো থাকে তবে প্রচুরক নির্ণয়য়ের সূত্র হচ্ছে

প্রচুরক $= L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$

$L =$ প্রচুরক শ্রেণীর নিম্নসীমা

$h =$ প্রচুরক শ্রেণীর শ্রেণী ব্যবধান

$f_1 =$ প্রচুরক শ্রেণী ও তার পূর্ববর্তী শ্রেণীর গণসংখ্যা পার্থক্য

$f_2 =$ প্রচুরক শ্রেণী ও তার পরবর্তী শ্রেণীর গণসংখ্যা পার্থক্য

উদাহরণ ১১। উদাহরণ ৪ এর শ্রেণী নিবেশণ এর প্রচুরক নির্ণয় :

প্রচুরক $= L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$

$= 24{\cdot}5 + \frac{6}{6+8} \times 5$

$= 26{\cdot}64$

$L = 24{\cdot}5,\ f_1 = 21 - 15 = 6$

$f_2 = 21 - 13 = 8,\ h = 5$

[বিকল্প পদ্ধতি : প্রচুরক ৩ × মধ্যক – ২ × গড়]

অনুশীলনী ৯.২

১। কোনো এলাকার 25 টি পরিবারের শিশুর সংখ্যা হল :

4, 1, 3, 0, 2, 1, 1, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 0, 5, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 3, 0, 4, 1. শিশুদের সংখ্যার গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

২। কোনো স্কুলের ৯ম শ্রেণীর 50 জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বর হল :

40, 49, 73, 40, 83, 49, 7, 91, 31, 7, 40, 91, 31, 73, 7, 49, 62, 73, 62, 40, 83, 49, 49, 31, 40, 62, 73, 49, 31, 19, 62, 49, 83, 91, 31, 40, 62, 83, 73, 83, 73, 19, 40, 19, 19, 49, 49, 62, 62, 19. প্রাপ্ত নম্বরের গড় সরাসরি এবং সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

৩। কোনো এলাকার 63 জন লোকের ওজনের (কিলোগ্রাম) গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি নিচে দেওয়া হল। এ এলাকার একজন লোকের গড় ওজন সরাসরি এবং সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

ওজন (কিলোগ্রাম) x_i	60	61	62	63	64	65
লোকসংখ্যা f_i	5	8	14	16	10	10

৪। কোনো স্কুলের দশম শ্রেণীর 40 জন শিক্ষার্থীর পরিসংখ্যানে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা সারণি নিচে দেওয়া হল। পরিসংখ্যানে প্রাপ্ত নম্বরের গড় সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

প্রাপ্ত নম্বর	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60	61–70	71–80	81–90	91–100
গণসংখ্যা	2	5	16	12	13	20	5	4	2	1

৫। নিম্নের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি থেকে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	5	20	30	40	50	35	21	12	10	8

৬। নিম্নের কোনো কলেজের ১ম বর্ষের চূড়ান্ত পরীক্ষায় 500 জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা সারণি দেওয়া হল। একজন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বরের গড় সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

প্রাপ্ত নম্বর	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60	61–70	71–80	81–90	91–100
শিক্ষার্থী সংখ্যা	5	20	50	75	145	100	80	20	5

৭। রাজশাহী বিশ্ববিদ্যালয়ের কয়েকটি বিভাগের স্নাতক পরীক্ষায় পাশের হার এবং সংশ্লিষ্ট বিভাগের শিক্ষার্থী সংখ্যা দেওয়া হল। গড় পাশের হার নির্ণয় কর।

বিভাগের নাম	গণিত	পরিসংখ্যান	পদার্থবিদ্যা	প্রাণিবিদ্যা	রসায়ন	অর্থনীতি	রাষ্ট্রবিজ্ঞান	ভূগোল	হিসাব বিজ্ঞান
পাশের হার %	70	45	80	85	75	65	77	68	71
শিক্ষার্থী সংখ্যা	120	80	70	75	90	100	85	80	130

৮। কোনো কারখানার 10 জন শ্রমিকের সাপ্তাহিক আয় (টাকায়) হল 400, 602, 650, 305

300, 503, 400, 710, 650, 950. শ্রমিকদের আয়ের মধ্যমা নির্ণয় কর।

৯। একজন পরীক্ষার্থীর তিনটি সাময়িকী পরীক্ষায় গণিতে প্রাপ্ত নম্বর হল যথাক্রমে 60, 75 ও 85 এবং চূড়ান্ত পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর হল, 95. তিনটি সাময়িকী পরীক্ষার গুরুত্ব সমান এবং চূড়ান্ত পরীক্ষার গুরুত্ব সাময়িকী পরীক্ষার দ্বিগুণ। গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয়কর।

১০। কোনো শ্রেণীর 45 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 15 জন বালিকা। 30 জন বালকের গড় ওজন হল 52 কেজি এবং 15 জন বালিকার গড় ওজন 45 কেজি। কেজিতে গড় ওজন নির্ণয় কর।

১১। কোনো শ্রেণীর 40 জন ছাত্রীর প্রাপ্ত নম্বরের গড় হল 65. যদি প্রতি ছাত্রীর প্রাপ্ত নম্বরের সাথে 5 যোগ করা হয়, তবে গড় কত হবে?

৯.৫। বিস্তার পরিমাপ (Measures of Dispersion)

অনেক সময় দেখা যায় যে, দুইটি উপাত্তের গড় সমান হলেও তাদের বৈশিষ্ট্য এক নয় এবং ব্যাখ্যাও এক হয় না। যেমন, মনে করি কোনো পরীক্ষায় দুইজন ছাত্র A ও B এর প্রাপ্ত নম্বর হল :

বিষয় / ছাত্র	বাংলা	ইংরেজি	গণিত	পদার্থ বিদ্যা	রসায়ন বিদ্যা	জীব বিদ্যা
A	75	70	0	80	100	95
B	65	50	90	60	75	80

এখানে বিভিন্ন বিষয়ে ছাত্র A এর গড় নম্বর = $\frac{420}{6} = 70$। ছাত্র B এর গড় নম্বর = $\frac{420}{6} = 70$.

দুইজন ছাত্রের গড় নম্বর সমান হলেও উপাত্তের দিকে ভাল করে লক্ষ করলে এটা নির্দ্বিধায় বলা যায় যে, A অপেক্ষা B এর কৃতিত্বের মান অপেক্ষাকৃত ভাল। সুতরাং গড় দেখে সব সময় দুইটি উপাত্তের তুলনা করা সম্ভব হয় না। তুলনা করতে হলে উপাত্তের চলকসমূহ গড়ের চতুরপার্শে কীভাবে ছড়ান–ছিটানো আছে তা জানা দরকার। যেমন, পূর্ব পৃষ্ঠার উদাহরণে A এর নম্বরগুলো গড় থেকে খুব বেশি বিস্তৃত এবং B এর মানগুলো অনেক বেশি সুষম। এজন্য পরিসংখ্যানে উপাত্তের চলকসমূহ গড় থেকে কী পরিমাণ বিস্তৃত তা জানা দরকার এবং গড় থেকে চলকসমূহের দূরত্বকে পরিসংখ্যানের ভাষায় বিস্তার বলে।

সংজ্ঞা। বিস্তার : যে মাত্রায় সংখ্যাসূচক উপাত্তের মানসমূহ তাদের গড় মানের চতুর্দিকে বিস্তৃত হয়, তা তাকে বিস্তার বলে।

বিস্তার পরিমাপের সাধারণ দুইটি পরিমাপ হল গড় ব্যবধান (Mean Deviation or Average Deviation) এবং পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation).

গড় ব্যবধান : n সংখ্যক সংখ্যা $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ এর গড় ব্যবধান হল :

গড় ব্যবধান = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$ যেখানে $\bar{x}$ হল সংখ্যাগুলোর গাণিতিক গড় মান এবং $|x_i - \bar{x}|$ হল $\bar{x}$ থেকে x_i এর ব্যবধান।

উদাহরণ ১। 2, 4, 6, 8, 10, 12. উপাত্তগুলোর গড় ব্যবধান নির্ণয় কর।

সমাধান : সংখ্যাগুলোর গাণিতিক গড়

$$\bar{x} = \frac{2+4+6+8+10+12}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

$$\therefore \text{গড় ব্যবধান} = \frac{|2-7|+|4-7|+|6-7|+|8-7|+|10-7|+|12-7|}{6}$$

$$= \frac{|-5|+|-3|+|-1|+|1|+|3|+|5|}{6} = \frac{5+3+1+1+3+5}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

বিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে গড় ব্যবধান : বিন্যস্ত উপাত্তের মান x_1, x_2 ...., x_k এর গণসংখ্যা যদি $f_1, f_2,$ ...., f_k হয়, তবে গড় ব্যবধান $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|$, যেখানে $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$.

উদাহরণ ২। নিচে ৯ম শ্রেণীর 60 জন ছাত্রীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হল। প্রাপ্ত নম্বরের গড় ব্যবধান নির্ণয় কর।

নম্বর	51–60	61–70	71–80	81–90	91–100
ছাত্রী	10	15	20	10	5

সমাধান : গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সারণি নিম্নরূপ :

নম্বর	গণসংখ্যা f_i	শ্রেণী মধ্যমান x_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - x\rvert$	$f\lvert x_i - x\rvert$
51–60	10	55·5	555	17·5	175
61–70	15	65·5	982.5	7·5	112·5
71–80	20	75·5	1510	2·5	50
81–90	10	85·5	855	12·5	125
91–100	5	95·5	477.5	22·5	112·5
মোট	n = 60		$\Sigma f_i x_i = 4380$		575

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n} = \frac{4380}{60} = 73$$

$$\therefore \text{গড় ব্যবধান} = \frac{\Sigma f|x - \bar{x}|}{n} = \frac{575}{60} = 9{\cdot}58$$

পরিমিত ব্যবধান **(Standard Deviation)** : n সংখ্যক সংখ্যা $x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n$ এর পরিমিত ব্যবধান

যদি s হয় তবে $s = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$

যেখানে $\bar{x}$ হল সংখ্যাগুলোর গাণিতিক গড় এবং $(x_i - \bar{x})$ হল $\bar{x}$ থেকে x_i এর ব্যবধান। সুতরাং s হল গড় থেকে মূল গড় ব্যবধানের বর্গ এবং এজন্য একে মূল গড় বর্গ ব্যবধানও (root mean square deviation) বলা হয়।

উদাহরণ ৩। 2, 4, 6, 8, 10, 12, উপাত্তগুলোর পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

সমাধান : যদি সংখ্যাগুলোর গাণিতিক গড় $\bar{x}$ হয় তবে $\bar{x} = \dfrac{2+4+6+8+10+12}{6} = 7$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $s = \sqrt{\left\{\dfrac{(2-7)^2+(4-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2+(12-7)^2}{6}\right\}}$

$= \sqrt{\left\{\dfrac{25+9+1+1+9+25}{6}\right\}} = \sqrt{\left\{\dfrac{10}{6}\right\}} = 3.41$

$\therefore$ সংখ্যাগুলোর পরিমিত ব্যবধান = 3.41

$\therefore$ বিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান : বিন্যস্ত উপাত্তের মান $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots, x_k$ এর গণসংখ্যা

যথাক্রমে $f_1, f_2 \ldots\ldots\ldots\ldots, f_k$ হলে, পরিমিত ব্যবধান $s = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2}{n}}$, যেখানে $n = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i$

উদাহরণ ৪। উদাহরণ ২ এ প্রদত্ত উপাত্তের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

সমাধান : পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় সারণি নিম্নরুপ :

নম্বর	গণ সংখ্যা f_i	শ্রেণী x_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
51–60	10	55·5	555	–17·5	306·25	3062·5
61–70	15	65·5	982·5	–7·5	56·25	843·75
71–80	20	75·5	1510	2·5	6·25	125
81–90	10	85·5	855	12·5	156·25	156·5
91–100	5	95·5	477·5	22·5	506·25	2531·25
মোট	60		4380			8125

$\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{n} = \dfrac{4380}{60} = 73$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{8125}{60}} = \sqrt{135.41} = 11{\cdot}63$$

উপাত্তসমূহের পরিমিত ব্যবধান 11.63

বিকল্প পদ্ধতি : সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে পরিমিতি ব্যবধান নিয়ে পদ্ধতি :

উদাহরণ ৪ : পরিমিতি ব্যবধান নির্ণয় : (সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি)

নম্বর	গণসংখ্যা f_i	u_i	f_iu_i	$f_iu_i^2$
51–60	10	– 2	– 20	40
61–70	15	–1	– 15	15
71–80	20	0	0	0
81–90	10	1	10	10
91–100	5	2	10	20
	$\Sigma f_i = 60$		$\Sigma f_iu_i = -15$	$\Sigma f_iu_i^2 = 85$

$$s = h\sqrt{\left\{\frac{\Sigma f_iu_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f_iu_i}{n}\right)^2\right\}}$$

$$= 10\sqrt{\left\{\frac{85}{60} - \left(\frac{-15}{60}\right)^2\right\}}$$

$$= 10\sqrt{1.35}$$

$$= 11.6$$

অনুশীলনী ৯.৩

১। নিম্নলিখিত উপাত্তগুলোর গড় ব্যবধান নির্ণয় কর :

(a) 3, 7, 9, 5 (b) 2·4, 1·6, 3·8, 4·1, 3·4

(c) 5, 3, 4, 8, 6, 7, 12, 34.

২। নিম্নের গণসংখ্যা নিবেষণ সারণি থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় কর।

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
f	8	12	15	10	20	18	13	8	3	2

৩। নিম্নের 40 টি শিল্প প্রতিষ্ঠানের বাৎসরিক আয়ের (কোটিতে) গণসংখ্যা নিবেষণ সারণি থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় কর।

আয়	1–50	51–100	101–150	151–200	201–250	251–300	301–350
শিল্প প্রতিষ্ঠানের সংখ্যা	7	0	9	13	5	4	2

৪। প্রদত্ত উপাত্তের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর :

(a) 3, 6, 2, 7, 1, 5 (b) 3·2, 2·8, 4·6, 5·2, 4·4

(c) 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1.

৫। নিচের তথ্যাদির গণসংখ্যা নিবেষণ সারণি থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর :

x	0	1	2	3	4	5	6	7
f	5	10	15	18	25	19	11	6

৬। নিম্নের গণসংখ্যা নিবেষণ সারণী থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর :

শ্রেণী	5–14	15–24	25–34	35–44	45–54	55–64	65–74	75–84
গণসংখ্যা	10	20	30	40	50	60	70	80

বহুনির্বাচনী ও সৃজনশীল প্রশ্নাবলী

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। সাম্প্রতিক অপরাধ বিষয়ক একটি প্রতিবেদন তৈরির লক্ষ্যে মি. মহসীন বিভিন্ন পত্রিকা হতে অপরাধ বিষয়ক তথ্যবলী ব্যবহার করতে আগ্রহী। পত্রিকা হতে সংগৃহীত এ ধরনের তথ্য হবে-

ক. অবিন্যস্ত তথ্য খ. প্রাথমিক তথ্য

গ. মাধ্যমিক তথ্য ঘ. অপ্রকাশিত তথ্য

২। একটি গণসংখ্যা নিবেষণের কোনো একটি শ্রেণীর গণসংখ্যা দ্বারা কী নির্দেশিত হয়- ঐ শ্রেণীর

ক. শ্রেণীব্যপ্তির মান খ. উপাত্ত সংখ্যা

গ. অনুমিত গড় ঘ. শ্রেণী মধ্যমান

৩। গণসংখ্যা নিবেষণের ক্ষেত্রে আয়তলেখ অঙ্কিত হয়-

ক. x অক্ষে শ্রেণীব্যপ্তি এবং y অক্ষে গণসংখ্যা নিয়ে;

খ. x অক্ষে শ্রেণীমধ্যমান এবং y গণসংখ্যা নিয়ে;

গ. x অক্ষে শ্রেণীব্যপ্তি এবং y অক্ষে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নিয়ে;

ঘ. x অক্ষে শ্রেণী উচ্চসীমা এবং y অক্ষে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নিয়ে;

৪। গাণিতিক গড় হচ্ছে সংখ্যাসূচক উপাত্তের

i. একটি প্রতিনিধিত্বকারী মান;

ii. কেন্দ্রীয় প্রবনতার পরিমাপ ;

iii. বিস্তার পরিমাপের একটি পরিমাপ;

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও iii খ. i ও ii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে ৫-৭ এর প্রশ্নের উত্তর দাও :

দশম শ্রেণীর চল্লিশ জন শিক্ষার্থী 6 নম্বরের একটি শ্রেণী পরীক্ষায় অংশগ্রহণ করে। শিক্ষার্থীদের প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেষণ হতে অঙ্কিত অজিত রেখাটি নিচে দেওয়া হল -

৫। কতজন শিক্ষার্থী শ্রেণী পরীক্ষায় 5 নম্বর পেয়েছে ?

ক. 3 খ. 4

গ. 5 ঘ. 6

৬। শ্রেণী পরীক্ষায় কতজন শিক্ষার্থী 3 এবং 3 এর অধিক নম্বর পেয়েছে ?

ক. 20 খ. 23

গ. 25 ঘ. 30

৭। সবচেয়ে বেশি সংখ্যক ছাত্র কত নম্বর পেয়েছে?

ক. 3 খ. 4

গ. 5 ঘ. 6

৮। x চলকের ক্ষেত্রে $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ধরা হলে $\bar{x}$-এর মান কত হবে? সেখানে $a = 50$, $h = 3$ এবং $\bar{u} = 5$

ক. 55 খ. 60

গ. 63 ঘ. 65

৯। একটি গণসংখ্যা নিবেষণের মোট গণসংখ্যা হলো 30 এবং অঙ্কিত গণসংখ্যা বহুভুজ হলো নিম্নরূপ-

নিবেষণটির গাণিতিক গড় হবে কত?

ক. 36 খ. 38

গ. 40 ঘ. 42

১০। 3, 4 এবং 5 এর গড় ব্যবধান কত হবে?

ক. $\frac{2}{3}$ খ. 1

গ. $\frac{3}{2}$ ঘ. 2

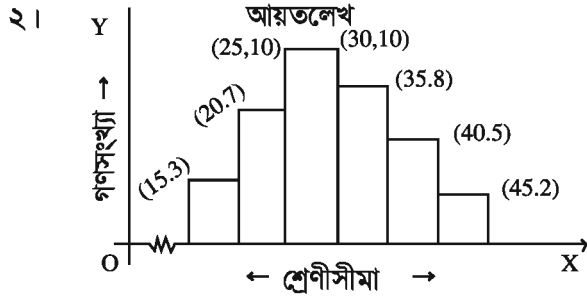
সৃজনশীল প্রশ্ন

১। আইডিয়াল স্কুলের দশম শ্রেণীর পঞ্চাশ জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বর হলো নিম্নরূপ-
55, 77, 58, 82, 63, 48, 65, 39, 97, 88, 76, 65, 98, 64, 79, 83, 53, 56, 45, 73, 93, 68, 34, 92, 87, 32, 65, 73, 85, 46, 56, 75, 69, 66, 76, 62, 41, 75, 67, 85, 67, 69, 89, 57, 62, 78, 45, 53, 73.

ক. প্রদত্ত তথ্যটির ধরন কী? কোন গণসংখ্যা নিবেষণে একটি শ্রেণীর গণসংখ্যা দ্বারা কী নির্দেশিত হয়?

খ. উপযুক্ত শ্রেণীব্যপ্তি নিয়ে গণসংখ্যা নিবেষণ তৈরি কর।

গ. সরাসরি এবং সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় বের কর।

২।

ক. গণসংখ্যা নিবেষণটির প্রথম শ্রেণীর মধ্যমান এবং শেষ শ্রেণীটির গণসংখ্যা কত?

খ. গণসংখ্যা নিবেষণটি তৈরি কর।

গ. পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

অনুশীলন ১.১

১। $B \subseteq A, C \subseteq A, C \subseteq B, C \subseteq D.$ ৫। $S' = \varnothing; S = R$ ৬। $S' = R; S = \varnothing$

৭। (ক) $A = \varnothing; B = \varnothing$, (খ) $\varnothing$ (গ) U (ঘ) $B \subset A$, (ঙ) U (চ) $\varnothing$ (ছ) $A \subset B$ (জ) U (ঝ) $A = B$

৯। $A \cup B = [-5, 7] = \{x : x \in R$ এবং $-5 \leq x < 7\}$.

$A \cup C = [-5, 5] = \{x : x \in R$ এবং $-5 \leq x \leq 5\}$.

$A \cap B = [2, 5] = \{x : x \in R$ এবং $2 < x \leq 5\}$.

$A \cap C = [0, 3] = \{x : x \in R$ এবং $0 \leq x < 3\}$.

$C \cup D = [0, 5] = \{x : x \in R$ এবং $0 \leq x \leq 5\}$. $C \cap D = \varnothing$

১০। (ক) [–5, 7 [(খ) [0, 5] (গ) [0, 3[(ঘ) $\varnothing$

অনুশীলনী ১.৩

১। নিজে কর :

২। (ক) $F_1 = \{(a, 1), (b, 2)\}$, $F_2 = \{(a, 2), (b, 1)\}$

(খ) $F_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$, $F_2 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 3)\}$

$F_3 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\}$, $F_4 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 1)\}$

$F_5 = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2)\}$, $F_6 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$

৩। এরূপ ছয়টি এক-এক মিল রয়েছে; একটি হল

$F_1 = \{(a, 3), (b, 1)\}$ $(c, 2), (d, 4)\}$

৪। $k \leftrightarrow 2^{k-1}$

৫। $n \leftrightarrow 3^{n-1}$

৬। এরূপ অসংখ্য উপসেট রয়েছে; যেমন–

$T = \{3^{2n} : n = 0$ অথবা $n \in N\}$

৭। k যে কোনো বিজোড় সংখ্যা হলে, $k + 2$ সংখ্যাটিও বিজোড় এবং $k + 2 > k$. সুতরাং A সেটে কোনো বৃহত্তম উপাদান নেই। অতএব, A অনন্ত সেট।

৮। $n^2 \in S$ হলে $(n + 1)^2 > n^2$ এবং $(n + 1)^2 \in S$. সুতরাং S অনন্ত সেট।

১১। 5. ১২। 60. ১৩। 8. ১৪। 5. ১৫। 48. ১৬। (১) 20. (২) 63. (৩) 14.

১৭। (১) 10%. (২) 50% ১৮। 10%.

অনুশীলনী ২.১

১। (ক) $x^3y + 3x^2y + 3xy + y^2 + 3y + 1$; মাত্রা 3, মুখ্য সহগ y ; ধ্রুব পদ $y^2 + 3y + 1$.

(খ) $y^2 + (x^3 + 3x^2 + 3x + 3)\, y + 1$; মাত্রা 2, মুখ্য সহগ 1; ধ্রুব পদ 1.

(গ) $x^2y + 3x^2y + 3xy + y^2 + 3y + 1$; মাত্রা 4.

২। $P(0) = 7, P(1) = 31, P(-1) = 15, P(\frac{1}{2}) = 9$. ৩। ভাগশেষ $P(2) = 2$.

৮। (ক) $Q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + \ldots\ldots + a^{n-1}$

(খ) $Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$

৯। $Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$

১১। (i) $(x-2)(x+1)(x+3)$ (ii) $(x-1)(x+2)(x+3)$

(iii) $(a-4)(a+1)(a+2)$ (ii) $(x+1)(x^3+2x^2+3x+5)$

(v) $(x-1)(x^3-3x^2+2x+10)$ (vi) $(x+1)^2(x+2)(x+3)$

(vii) $(2a-1)(a+1)(a+2)(2a+1)$ (viii) $(x+1)(x^2+x+1)$

(ix) $(2a-1)(a^2-a-1)$ (x) $(x-4y)(x-3y)(x-2y)$.

অনুশীলনী ২.২

১। (ক) $(a-b)(b-c)(c-a)$

(খ) $-(a-b)(b-c)(c-a)$

(গ) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(ঘ) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(ঙ) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

(চ) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

(ছ) $-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y)(y+z)(z+x)$

(জ) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(ঝ) $(x+y+z)(xy+yz+zx)$

(ঞ) $(x+y+z)(xy+yz+zx)$

(ট) $-(x-y)(y-z)(z-x)$

(ঠ) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$

(ড) $(a + b)(b + c)(c + a)$
(ঢ) $(x - 2y - 1)(x^2 + 4y^2 - 4xy + x - 2y + 1)$
(ণ) $(a^3 - 3a + 5)(a^4 + 3a^3 + 4a^2 + 15a + 25)$

অনুশীলনী ২.৩

১। 0 ২। $a + b + c$ ৩। d ৪। $a + b + c + 1$ ৫। 2 ৬। $\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$
৭। 0 ৮। $\frac{1}{x-1}$ ৯। $\frac{2}{x} + \frac{2}{x+2}$ ১০। $\frac{6}{x-4} - \frac{5}{x-3}$
১১। $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{3x-2}$ ১২। $\frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+3}$ ১৩। $\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+4}$
১৪। $x + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+3}$

অনুশীলনী ৪.২

৫। (ক) 1.x; (খ) $\frac{\sqrt{a}}{b}$; (গ) $\frac{a^2 - b^2}{ab}$; (ঘ) 1; (ঙ) 1; (চ) $\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$

অনুশীলনী ৪.৩

৩। (ক) 0·000057848 (খ) 0·18351 (গ) 864·90 (ঘ) 1·01302 (ঙ) 19995·62

৪। (ক) 9·2104 (খ) –4·90779 (ঘ) 230·76.

অনুশীলনী ৫.১

১। (ক) ডোম $S = \{1, 2, 3, 4\}$ রেঞ্জ $S = \{5, 10, 15, 20\}$
$S^{-1} = \{5, 1),(10, 2),(15, 3),(20, 4)\}.SS^{-1}$ প্রত্যেকে ফাংশন।

(খ) ডোম $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
রেঞ্জ $S = \{-1, 0, 3, 8\}$
$S^{-1} = \{(8, -3), (3, -2), (0, -1), (-1, 0), (0, 1), (3, 2), (8, 3)\}$
S ফাংশন; S^{-1} ফাংশন নয়, কেননা (0, 1) এবং (0, –1) $\leftarrow S^{-1}$

(গ) ডোম $S = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\}$ রেঞ্জ $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
S ফাংশন নয়, কেননা (1,1) এবং (1, –1) $\leftarrow$S.
$S^{-1} = \{(0, \frac{1}{2}), (1,1), (-1,1), (2, \frac{5}{2}), (-2, \frac{5}{2})\}$
S^{-1} ফাংশন।

(ঘ) ডোম $S = \{-3, -1, 0, 3\}$
রেঞ্জ $S = \{-3, -1, 0, 3\}$
$S^{-1} = S.S$, S^{-1} ফাংশন।

(ঙ) ডোম $S = \{2\}$, রেঞ্জ $= \{1, 2, 3\}$ S ফাংশন নয়।

২। (ক) $S = \{(-1, 2), (0, 1), (1, 0) (2, -1)\}$
ডোম $S = \{-1, 0, 1, 2\}$, রেঞ্জ $S = \{-1, 0, 1, 2\}$
(খ) $S = \{(-1, -2), (0, -1), (1, 0) (2, 1)\}$
ডোম $S = \{-1, 0, 1, 2\}$, রেঞ্জ $S = \{-2, -1, 0, 1\}$
(গ) $S = \{(0, 0), (-1, 1), (1, 1)\}$
ডোম $S = \{0, -1, 1\}$, রেঞ্জ $S = \{-0, 1\}$
(ঘ) $S = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1)\}$
ডোম $S = \{0, 1\}$, রেঞ্জ $S = \{0, -1, 1\}$

৩। (ক), (খ), (গ)

৪। এক-এক ফাংশন ঃ ১। (ক), (গ) ২। (ক) (খ)

৫। (ক) ডোম $F = \mathbf{R}$, এক-এক (খ) ডোম $F = \mathbf{R}$ এক-এক নয়
(গ) ডোম $F = \{x \leftarrow \mathbf{R} : x \geq 1\}$ এক-এক (কেননা $\sqrt{x-1}$ লিখলে অঋণাত্মক বর্গমূলকেই বোঝায়)
(ঘ) ডোম $F = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, এক-এক
(ঙ) ডোম $F = \mathbf{R}$, এক-এক নয় (চ) ডোম $P = \mathbf{R}$, এক-এক
(ছ) ডোম $F = \{x \leftarrow \mathbf{R} : x \geq 0\}$, এক-এক

৬। (ক) $-5, -1, 3$ (খ) a (গ) 3 (ঘ) $\frac{y+1}{2}$

৭। (ক) $36, 4, 1, 0, 16$ (খ) $-9, 11$ (গ) 1 (ঘ) $1 + \sqrt{y}$

৮। (ক) $0, 2, 3$ (খ) $|a|$ (গ) 26 (ঘ) $1 + y^2$

৯। (ক) $3, 1, 0, 1, 3$ (খ) ± 4, (গ) 0 (ঘ) y

১০। (ক) ডোম $F = \mathbf{R}$ (খ) রেঞ্জ $F = \mathbf{R}$
(গ) $F^{-1} = \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, F^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

অনুশীলনী ৬.১

১। 13 ২। $\frac{6}{5}$ ৩। 9 ৪। ± 4 ৫। 5 ৬। $\frac{5}{2}, -\frac{13}{2}$ ৭। $1, 5$ ৮। $2, -\frac{9}{2}$ ৯। $\frac{25}{7}, -\frac{1}{7}$ ১০। $\frac{9}{-11}, -\frac{3}{2}$

অনুশীলনী ৬.২

১। 2 ২। $\frac{7}{3}$ ৩। 6 ৪। 5 ৫। 2 ৬। $\frac{5}{2}$ ৭। 3 ৮। 0 ৯। $0, 2$ ১০। $-1, 0$ ১১। $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ ১২। $2, 3$

অনুশীলনী ৬.৩

১। $x = 3, -3$ ২। $x = 5, 1$ ৩। $x = 2, -12$ ৪। $x = \frac{2}{1}$ ৫। $x = -3, 2$ ৬। $x = -3, -\frac{3}{1}$

অনুশীলনী ৬.৪

সমাধান সেট সংখ্যা রেখায় নিজে কর।

১। $S = \{x : -\frac{5}{2}\ x < x < 1\}$

২। $S = \{x : x < -2\} \cup \{x : x > \frac{3}{4}\}$

৩। $S = \{x : x > 1\} \cup \{x : -2 < x, 0\}$

৪। $S = \{x : x > 2\} \cup \{x : -1 < x < 0\}$

৫। $S = \{x : x < 0\} \cup \{4 < x < 5\}$

৬। $S = \{x : 0 < x < 2\} \cup \{x : x > 3\}$

৭। $S = \{x : -1 < x < 4\}$.

৮। $S = \{x : 1 < x < 3\}$

৯। $S = \{x : x < -1$ অথবা $x > \frac{3}{2}$ এবং $x \neq 2\}$

অনুশীলনী ৭.১

(x, y) যথাক্রমে সমান :

১। $(2,3), (\frac{15}{2}, \frac{16}{9})$

২। $(3, 4), (-6, \frac{5}{8})$

৩। $(0, 0), (13, 13), (3, -2), (-2, 3)$

৪। $(0, 0), (5, 5), (2, -1), (-1, 2)$

৫। $(\frac{1}{5}, 5), (\frac{4}{5}, 20)$

৬। $(3, -\frac{5}{3}), (\frac{16}{9}, -\frac{3}{4})$

৭। $(1,2), (-1, -2)$

৮। $(7, 5), (-7, -5), (\sqrt{2}, -6\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$

৯। $(3, 4), (4, 3), (-3, -4), (-4, -3)$

১০। $(2, 1), (2, -1) (-2, 1), (-2, -1)$

১১। $(1, -2), (2, -1), (-1, 2), (-2, 1)$

১২। $(1, 3), (-1, -3), (\frac{13}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}), (-\frac{13}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}})$

অনুশীলনী ৭.২

(x,y) যথাক্রমে সমান :

১। $(2, 3)$

২। $(2,1), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

৩। $(4, 0)$

৪। $(1,2)$

৫। $(3, 3)$

৬। $(2, \pm 2), (-2, \pm\frac{1}{2})$

৭। $(2, \pm 2), (-2, \pm\frac{1}{2})$

৮। $(1,2), (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

৯। $(2, \pm 2), (-2, \pm\frac{1}{2})$

অনুশীলনী ৭.৩

(x, y, z) যথাক্রমে সমান :

১। (2, 1, 0) ২। (3, 2, 1) ৩। (1, 2, –1) ৪। (3, 5, –2)
৫। (2, 3, –1) ৬। (2, –3, 4)
৭। (2, 3, 4) ৮। (0, 0 0)
৯। (3, 7, 6)

অনুশীলনী ৮

১। (ক) 19; 29; 2r – 1 (খ) 21; 31; 2r + 1 (গ) $\frac{1}{110}$; $\frac{1}{240}$; $\frac{1}{r(r+1)}$

(ঘ) 1; 0; 1 (r জোড় হলে) ও 0 (r বিজোর হলে) (ঙ) $4 \times (\frac{1}{3})^{r-1}$

(চ) 0; 1; 0(r জোড় হলে) ও 1(r বিজোর হলে) ২। (ক) ·1; ·01; (খ) $n > 10^5$

(গ) 0 ৪। (ক) 18 (খ) $\frac{10}{9}$ (গ) সমষ্টি নেই।

৫। $x < -2$ এবং $x > 0$; $\frac{1}{x}$.

৬। (ক) $\frac{4}{9}$ (খ) $\frac{4}{33}$ (গ) $\frac{41}{3330}$ (ঘ) $\frac{281}{33}$ (ঙ) $\frac{410}{333}$ (চ) $\frac{237}{37}$

অনুশীলনী ৯.১

৮। (i) 21, (ii) 33, (iii) 5.

৯। 10 ও 99, 109; 109; 119; 119, 129; 129, 139, 139, 149, 149, 159, 159, 169.

অনুশীলনী ৯.২

১। 2 ২। 52·48 ৩। 62·76 কেজি ৪। 43·5 ৫। 4·98 ৬। 56·70 ৭। 70·53 ৮। 552·5
৯। 82 ১০। 49·67 কেজি ১১। 70.

অনুশীলনী ৯.৩

১। (a) 2 (b) ·85 (c) 6·56 ২। 38·1 ৩। 64 8। (a) 2·16 (b) ·90 (c) ·484 ৫। 1·80 ৬। 43. 8 (প্রায়)

বঙ্গবন্ধুর স্বপ্ন - দারিদ্র্য ও নিরক্ষরতামুক্ত সোনার বাংলাদেশ গড়তে
নিজেদের যোগ্য নাগরিক হিসাবে গড়ে তোল

– মাননীয় প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা

এমন কাজের চেষ্টা করো
যার দ্বারা মরেও অমর হতে পার

২০১০ শিক্ষাবর্ষ থেকে সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য